

HAUPTAUFSÄTZE

Zur Gaußischen Verteilung im n -dimensionalen Raume

Von H. Richter in Haltingen (Kreis Lörrach)

Für den Fall, daß die Koordinaten der Meßpunkte im n -dimensionalen Raume in unbekannter Weise linear von einer unbekannten Anzahl unabhängiger Variabler mit Gaußischer Verteilung abhängen, jedoch der Streuungstensor aus Versuchen bekannt ist, wird der von den Meßpunkten erfüllte Teilraum und die Wahrscheinlichkeitsdichte in demselben sowie die Genauigkeitshyperfläche bestimmt.

In the case that the coordinates of the measuring points (in a n -dimensional space) are depending linearly — in an unknown way — on an unknown number of independent variables distributed according to the Gauss law, that the tensor of variation, however, is found out by experiment, the part of the space filled with measuring points and the density of probability in that part as well as the supersurface of accuracy are evaluated.

В случае, когда координаты точек измерения в пространстве с n измерениями неизвестным образом зависят от неизвестного числа независимых переменных, распределённых по закону Гаусса, но когда тензор рассеяния известен из опытов, определяются часть пространства, заполненного точками измерения, густота вероятности в этом пространстве, а также гиперповерхность точности измерения.

§ 1. Problemstellung

Es kommt in den Anwendungen oft vor, daß das Ergebnis einer Messung aus n Werten x_1, x_2, \dots, x_n , also einem Vektor $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ im n -dimensionalen Raume, besteht derart, daß die x_p Funktionen von r aleatorischen Variablen u_1, \dots, u_r sind, die unabhängig voneinander je einer Gaußischen Verteilung mit dem Erwartungswerte Null¹⁾ genügen. Die genaue Gestalt dieser Abhängigkeit ist dabei unbekannt; dagegen kennt man aus Versuchen den sog. Streuungstensor \mathfrak{T} von \mathbf{x} , dessen Komponenten μ_{ik} durch die Erwartungswerte $E(x_i x_k)$ der Produkte $x_i x_k$ gebildet werden. Oft genügt es, an Stelle der genauen Abhängigkeit der x_p von den u_e eine lineare Näherung zu verwenden, so daß vorausgesetzt wird, daß zwischen den Vektoren \mathbf{x} und $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_r)$ ein affiner Zusammenhang besteht. Damit ergibt sich die folgende Aufgabe: Es sei bekannt, daß

$$\mathbf{x} = \mathfrak{A}\mathbf{u} \dots \dots \dots (1)$$

ist, wo \mathfrak{A} eine unbekannte Matrix mit n Zeilen und r Spalten bei unbekanntem r ist und die Komponenten von \mathbf{u} unabhängig voneinander je einer Gaußischen Verteilung gehorchen. Bekannt sei dagegen der Streuungstensor \mathfrak{T} . Die Wahrscheinlichkeitsdichte $\varphi(\mathbf{x})$ und die Gleichung der Genauigkeitshyperfläche im \mathbf{x} -Raum sind zu finden.

Diese Aufgabe wurde kürzlich von K. Stange²⁾ in einer ausführlichen Arbeit für $n=3$ behandelt. Es sind dabei außer der unwesentlichen Erweiterung auf beliebiges n noch die folgenden Fragen offen geblieben:

a) Es wurde vorausgesetzt, daß \mathfrak{T} nicht singular ist, d. h. daß seine Determinante $|\mathfrak{T}|$ nicht verschwindet. Geometrisch bedeutet dies, daß die \mathbf{x} den gesamten \mathbf{x} -Raum erfüllen, was auch bei $r \geq n$ nicht der Fall zu sein braucht. Der Fall $|\mathfrak{T}|=0$ muß also noch behandelt werden.

b) In den Fällen $r < n$ wurde angenommen, daß \mathfrak{A} und damit der durch die \mathbf{x} aufgespannte Teilraum R bekannt ist, so daß man in demselben neue Koordinaten einführen und damit n reduzieren kann. Es bleibt also die Frage der Bestimmung von R und φ aus \mathfrak{T} bei $r < n$ offen.

c) Es ist bemerkenswert, daß im Unterschied zu der von Stange für φ angegebenen Formel seine Gleichung für die Genauigkeitshyperfläche auch bei $|\mathfrak{T}|=0$ und $r < n$ richtig bleibt, obgleich in seinem Beweis $|\mathfrak{T}| \neq 0$ und $r \geq n$ verwendet wird. Der Beweis dieser allgemeinen Gültigkeit ist also noch nachzuholen.

Es erscheint daher zweckmäßig, die Fragestellung nochmals aufzugreifen.

¹⁾ Diese Normierung ist natürlich keine Einschränkung der Allgemeinheit.

²⁾ K. Stange, Über die Verteilungsdichte der Meß- oder Beobachtungsfehler eines dreidimensionalen Punktraumes. Z. angew. Math. Mech. 28 (1948), S. 235–243.

§ 2. Die Reduktion von \mathfrak{A}

Es ist keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir im folgenden stets voraussetzen, daß die u_e die Streuung $E(u_e^2) = 1$ besitzen. Dies läßt sich ja ohne Änderung der Wahrscheinlichkeitsverteilung der \mathfrak{x} durch Multiplikation der u_e mit einem Faktor und gleichzeitige Division der entsprechenden Spalte von \mathfrak{A} durch denselben erreichen. (1) bedeutet nun geometrisch, daß der r -dimensionale u -Raum affin auf einen m -dimensionalen Unterraum R des \mathfrak{x} -Raumes bei $m \leq n$ und $m \leq r$ abgebildet wird.

Betrachten wir zunächst den einfachsten Fall $m = n = r$ und damit $|\mathfrak{A}| \neq 0$. Da sich die Volumeneinheit bei der affinen Abbildung mit $|\mathfrak{A}|$ multipliziert, gilt hier für die Wahrscheinlichkeitsdichten $\varphi(\mathfrak{x})$ und $\psi(u)$:

$$\varphi(\mathfrak{x}) = \frac{1}{|\mathfrak{A}|} \psi(u) = \frac{1}{|\mathfrak{A}| \sqrt{2\pi}^n} e^{-\frac{1}{2} u^2}.$$

Nun ist, wenn der Querstrich über einer Matrix die Vertauschung von Zeilen und Spalten bedeutet

$$u^2 = \mathfrak{A}^{-1} \mathfrak{x} \cdot \mathfrak{A}^{-1} \mathfrak{x} = \mathfrak{x} \cdot \overline{\mathfrak{A}^{-1}} \mathfrak{A}^{-1} \mathfrak{x} = \mathfrak{x} \cdot (\mathfrak{A} \overline{\mathfrak{A}})^{-1} \mathfrak{x}.$$

Andererseits ist

$$E(x_i x_k) = E\left(\sum_{e,\sigma} a_{ie} a_{k\sigma} u_e u_\sigma\right) = \sum_e a_{ie} a_{ke},$$

also

$$\mathfrak{I} = \mathfrak{A} \overline{\mathfrak{A}} \quad \text{und} \quad |\mathfrak{I}| = |\mathfrak{A}|^2 \dots \dots \dots (2).$$

Damit wird schließlich

$$\varphi(\mathfrak{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n \sqrt{|\mathfrak{I}|}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \mathfrak{x} \cdot \mathfrak{I}^{-1} \mathfrak{x}} \dots \dots \dots (3).$$

In diesem einfachsten Falle ist die Aufgabe bezüglich der Wahrscheinlichkeitsdichte also bereits gelöst.

Bemerkung 1: Ist \mathfrak{A} speziell eine orthogonale Transformation, so wird $\mathfrak{I} = \mathfrak{A} \overline{\mathfrak{A}} = \mathfrak{E}$ (= Einheitsmatrix). (3) zeigt dann, daß bei orthogonalen Transformationen wieder unabhängige normierte Gaußische Variable entstehen.

Gehen wir nun wieder zum allgemeinen Falle über. Hier wird der durch $\mathfrak{A}u = 0$ definierte $(r-m)$ -dimensionale Unterraum U des u -Raumes bei der Abbildung annulliert. Wir wählen eine orthogonale Transformation \mathfrak{R} des u -Raumes, $v = \mathfrak{R}u$, bei der U gerade in den durch die letzten $r-m$ Einheitsvektoren aufgespannten Teilraum übergeführt wird. Es ist dann:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{A}u = \mathfrak{A} \mathfrak{R}v = \mathfrak{B}v,$$

wo v nach Bemerkung 1 die gleichen Voraussetzungen wie u erfüllt und in \mathfrak{B} die letzten $r-m$ Spalten verschwinden. Da somit v_{m+1}, \dots, v_r gar nicht \mathfrak{x} beeinflussen, können wir sie weglassen und statt des v -Raumes gleich den durch v_1, \dots, v_m definierten m -dimensionalen Raum bei $m \leq n$ verwenden. Wir haben somit den

Satz 1: Unter den in der Aufgabe gestellten Voraussetzungen ist $\mathfrak{x} = \mathfrak{B}v$, wo die Komponenten v_1, \dots, v_m unabhängig voneinander Gaußischen Verteilungen mit der Streuung 1 gehorchen und \mathfrak{B} den Rang m besitzt. Es ist $m \leq n$.

§ 3. Die Wahrscheinlichkeitsdichte

Für $m = n$ ist $|\mathfrak{B}| \neq 0$ und damit nach (2) auch $|\mathfrak{I}| = |\mathfrak{B}|^2 \neq 0$. Für $m < n$ dagegen ist $|\mathfrak{I}| = |\mathfrak{B} \overline{\mathfrak{B}}| = 0$. Im nichtsingulären Fall $|\mathfrak{I}| \neq 0$ ist also sicher $m = n$, so daß (3) anwendbar ist. Wir haben somit

Satz 2: Bei $|\mathfrak{I}| \neq 0$ ist

$$\varphi(\mathfrak{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n \sqrt{|\mathfrak{I}|}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \mathfrak{x} \cdot \mathfrak{I}^{-1} \mathfrak{x}}.$$

Damit haben wir das Ergebnis von Stange auf etwas einfachere Art wiedergefunden.

Wir wenden uns nun zu dem offen gebliebenen Falle $|\mathfrak{I}| = 0$, resp. $m < n$ (Fragen (a) und (b) von § 1). Hier wird vermöge $\mathfrak{x} = \mathfrak{B}v$ der m -dimensionale v -Raum auf den m -dimensionalen Unterraum R des \mathfrak{x} -Raumes abgebildet. Wir wählen nun eine orthogonale Transformation \mathfrak{R}_n ,

die R in den durch die ersten m -Einheitsvektoren aufgespannten Raum R_1 dreht. Es ist dann bei

$$\eta = \mathfrak{R}_n \xi: \dots \dots \dots (4)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} \eta &= (\mathfrak{R}_n \mathfrak{B}) v = \mathfrak{C} v \\ \mathfrak{C} &= \begin{pmatrix} \mathfrak{C}_1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5),$$

wo \mathfrak{C}_1 eine m -reihige quadratische Matrix mit $|\mathfrak{C}_1| \neq 0$ ist.

In R_1 wird damit η repräsentiert durch den m -dimensionalen Vektor $\eta_1 = (y_1, \dots, y_m) = \mathfrak{C}_1 v$ mit der durch Satz 2 gegebenen m -dimensionalen Verteilungsdichte

$$\psi(\eta_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi^m} \sqrt{|\mathfrak{I}_1|}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \eta_1 \cdot \mathfrak{I}_1^{-1} \eta_1} \quad \text{bei} \quad \mathfrak{I}_1 = \mathfrak{C}_1 \bar{\mathfrak{C}}_1 \quad \text{und} \quad |\mathfrak{I}_1| \neq 0 \dots \dots (6).$$

Da \mathfrak{R}_n orthogonal ist, ist diese Wahrscheinlichkeitsdichte gleich der entsprechenden Wahrscheinlichkeitsdichte im Unterraum R des ξ -Raumes:

$$\varphi(\xi) = \psi(\eta_1) \quad \text{für} \quad \xi \in R \dots \dots \dots (7).$$

Nun ist für $\eta \in R_1$:

$$\eta_1 \cdot \mathfrak{I}_1^{-1} \eta_1 = \eta \cdot \begin{pmatrix} \mathfrak{I}_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \eta = \mathfrak{R}_n \xi \cdot \begin{pmatrix} \mathfrak{I}_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathfrak{R}_n \xi,$$

oder

$$\eta_1 \cdot \mathfrak{I}_1^{-1} \eta_1 = \xi \cdot \bar{\mathfrak{R}}_n \begin{pmatrix} \mathfrak{I}_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathfrak{R}_n \xi \dots \dots \dots (8).$$

Andererseits ist nach (5):

$$\mathfrak{I} = \mathfrak{B} \bar{\mathfrak{B}} = \bar{\mathfrak{R}}_n \mathfrak{C} \bar{\mathfrak{C}} \mathfrak{R}_n = \bar{\mathfrak{R}}_n \begin{pmatrix} \mathfrak{I}_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathfrak{R}_n \dots \dots \dots (9).$$

Wird umgekehrt \mathfrak{I} durch eine beliebige orthogonale Transformation \mathfrak{E}_n in die Gestalt gebracht:

$$\mathfrak{I} = \bar{\mathfrak{E}}_n \begin{pmatrix} \mathfrak{I}_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathfrak{E}_n, \quad |\mathfrak{I}_0| \neq 0,$$

so ist wegen der positiven Eigenwerte von \mathfrak{I}_0 :

$$\mathfrak{R}_n = \begin{pmatrix} \mathfrak{R}_m & 0 \\ 0 & \mathfrak{R}_{n-m} \end{pmatrix} \mathfrak{E}_n \quad \text{mit} \quad \bar{\mathfrak{R}}_m \mathfrak{I}_1 \mathfrak{R}_m = \mathfrak{I}_0 \quad \text{und} \quad |\mathfrak{I}_1| = |\mathfrak{I}_0| \dots \dots \dots (10),$$

wo \mathfrak{R}_m und \mathfrak{R}_{n-m} resp. m - und $(n-m)$ -dimensionale orthogonale Transformationen sind. Es ist dann nach (8)

$$\eta_1 \cdot \mathfrak{I}_1^{-1} \eta_1 = \xi \cdot \bar{\mathfrak{E}}_n \begin{pmatrix} \mathfrak{I}_0^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathfrak{E}_n \xi \dots \dots \dots (11).$$

Der Unterraum R der ξ entsteht durch Anwendung von $\bar{\mathfrak{R}}_n = \bar{\mathfrak{E}}_n \begin{pmatrix} \mathfrak{R}_m & 0 \\ 0 & \mathfrak{R}_{n-m} \end{pmatrix}$ auf die ersten m -Einheitsvektoren. Da aber der rechts stehende Faktor dieses Ausdruckes für $\bar{\mathfrak{R}}_n$ den Raum R_1 in sich dreht, genügt es statt dessen, $\bar{\mathfrak{E}}_n$ auf R_1 anzuwenden. Diese Tatsache liefert zusammen mit (6), (7), (10) und (11) den

Satz 3: Bei $|\mathfrak{I}| = 0$ bringe man \mathfrak{I} durch eine orthogonale Transformation \mathfrak{E}_n auf die Gestalt

$$\mathfrak{I} = \bar{\mathfrak{E}}_n \begin{pmatrix} \mathfrak{I}_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathfrak{E}_n,$$

wo \mathfrak{I}_0 vom Grade m mit $|\mathfrak{I}_0| \neq 0$ ist; dann liegen alle ξ in dem durch die ersten m Spalten von $\bar{\mathfrak{E}}_n$ aufgespannten Teilraum R und haben dort die m -dimensionale Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi^m} \sqrt{|\mathfrak{I}_0|}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \xi \cdot \mathfrak{I}' \xi} \quad \text{bei} \quad \mathfrak{I}' = \bar{\mathfrak{E}}_n \begin{pmatrix} \mathfrak{I}_0^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathfrak{E}_n.$$

Bemerkung 2: Setzt man in die Formel von Satz 3 einen beliebigen Vektor ein, so liefert $\varphi(\xi)$ die Wahrscheinlichkeitsdichte in dem Punkte der Projektion von ξ auf R .

Bemerkung 3: Für $m=n$ wird in Satz 3 $\mathfrak{E}_n = \mathfrak{E}$ und $\mathfrak{I}_0 = \mathfrak{I}$, so daß Satz 2 in Satz 3 enthalten ist.

§ 4. Die Genauigkeitshyperfläche

Es sei jetzt \mathfrak{n} ein beliebiger Vektor im \mathfrak{x} -Raum von der Länge 1. Unter der Wahrscheinlichkeitsdichte φ_n in der \mathfrak{n} -Richtung versteht man dann die Wahrscheinlichkeitsdichte von $\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{n}$, genommen für alle \mathfrak{x} ; d. h. die Wahrscheinlichkeitsdichte der ersten Koordinate in einem Koordinatensystem, bei welchem \mathfrak{n} der erste Einheitsvektor ist.

Ist \mathfrak{n} senkrecht zum Unterraum R , so ist natürlich $\varphi_n = 0$. Hat dagegen \mathfrak{n} eine endliche Projektion in R , so setzen wir analog zu (4): $m = \mathfrak{R}_n \mathfrak{n}$. Dann entspricht der Hyperebene $\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{n} = \xi$ die Hyperebene $\mathfrak{y} \cdot m = \xi$ im \mathfrak{y} -Raume, die mit dem Unterraum R_1 die Hyperebene $\mathfrak{y}_1 \cdot m_1 = \xi$ gemeinsam hat, wo $m_1 \neq 0$ die Projektion von m in R_1 bedeutet. Der genannten Hyperebene entspricht im \mathfrak{y} -Raume wegen $\mathfrak{y}_1 = \mathfrak{C}_1 \mathfrak{y}$ die Hyperebene $\xi = m_1 \cdot \mathfrak{C}_1 \mathfrak{y} = \mathfrak{y} \cdot \mathfrak{C}_1 m_1$, die den Abstand

$$\frac{\xi}{|\mathfrak{C}_1 m_1|} = \frac{\xi}{\sqrt{m_1 \cdot \mathfrak{C}_1 \mathfrak{C}_1 m_1}}$$

vom Koordinatenursprung besitzt. Da im \mathfrak{y} -Raume orthogonale Transformationen nichts ausmachen (vgl. Bemerkung 1), können wir annehmen, daß der Normalenvektor $\mathfrak{C}_1 m_1 / |\mathfrak{C}_1 m_1|$ ein Grundvektor ist. Wegen der Affinität aller genannten Abbildungen ist also die gesuchte Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$\varphi_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{m_1 \cdot \mathfrak{C}_1 \mathfrak{C}_1 m_1}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{(\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{n})^2}{m_1 \cdot \mathfrak{C}_1 \mathfrak{C}_1 m_1}}$$

Diese Formel haben wir nun noch durch einen Ausdruck in \mathfrak{I} zu ersetzen. Nun ist gemäß (6) und (9) für beliebiges \mathfrak{n} :

$$m_1 \cdot \mathfrak{C}_1 \mathfrak{C}_1 m_1 = m_1 \cdot \mathfrak{I}_1 m_1 = m \cdot \begin{pmatrix} \mathfrak{I}_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} m = \mathfrak{R}_n \mathfrak{n} \cdot \begin{pmatrix} \mathfrak{I}_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathfrak{R}_n \mathfrak{n},$$

oder

$$m_1 \cdot \mathfrak{C}_1 \mathfrak{C}_1 m_1 = \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{R}_n \begin{pmatrix} \mathfrak{I}_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathfrak{R}_n \mathfrak{n} = \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{I} \mathfrak{n} \quad \dots \dots \dots (12).$$

Insbesondere ist $\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{I} \mathfrak{n} = 0$ für $m_1 = 0$, also für die \mathfrak{n} senkrecht zu R , für welche $\varphi_n = 0$ ist. Damit haben wir den

Satz 4: Ist \mathfrak{n} ein beliebiger Vektor der Länge 1, so ist die Wahrscheinlichkeitsdichte von $\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{n}$:

$$\varphi_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{I} \mathfrak{n}}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{(\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{n})^2}{\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{I} \mathfrak{n}}}.$$

φ_n ist eine Gaußische Verteilung mit dem Genauigkeitsmaß

$$h_n = \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{I} \mathfrak{n}}} \quad \dots \dots \dots (12).$$

Damit ergibt sich sofort der

Satz 5: Trägt man in jeder Richtung \mathfrak{n} das zu φ_n gehörige Genauigkeitsmaß h_n ab, so liegen die Vektoren $\mathfrak{s} = h_n \cdot \mathfrak{n}$ auf der Hyperfläche

$$\mathfrak{s} \cdot \mathfrak{I} \mathfrak{s} = \frac{1}{2}.$$

Damit ist auch die Gleichung der Genauigkeitshyperfläche als allgemein gültig bewiesen.

Eingegangen: 26. 9. 1948.

Über die Fehlerabschätzung des Adamschen Verfahrens zur Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung

Von Arnold Fricke in Braunschweig

Die von Tollmien für den Annäherungsgrad $n = 3$ gegebene Fehlerabschätzung für die extrapolative und interpolative Form des Adamschen Verfahrens zur numerischen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung wird auf einen beliebigen Annäherungsgrad verallgemeinert und verschärft. Die erhaltenen Fehlerschranken werden mit den von v. Mises und G. Schulz angegebenen verglichen und an Beispielen erläutert.

Considering the numerical integration of differential equations of the first order by the method of Adams, the valuation of the errors given by Tollmien for the degree of approximation $n = 3$ in the case of interpolation and extrapolation, is generalized to any degree of approximation and made more distinct, too. The limits of the errors thus obtained are compared with that given by v. Mises and G. Schulz, and explained by examples.

Оценка ошибки, данная Тольмином для третьего приближения экстраполяционной и интерполяционной формы метода Адамса численного решения простых дифференциальных уравнений первого порядка, обобщается и уточняется для приближения любого порядка. Полученные оценки погрешности поясняются на примерах и сравниваются с оценкой, данной Мизесом и Шульцем.

Eine Fehlerabschätzung für das Adamssche Verfahren fortlaufender Extrapolation wurde zuerst von R. v. Mises¹⁾ angegeben. Für das Interpolationsverfahren, welches durch iterative Verbesserung eine höhere Genauigkeit erreicht, wurde sie nach demselben Prinzip von G. Schulz²⁾ geleistet. Von einem ganz anderen Gedanken ausgehend teilte später Tollmien³⁾ für beide Arten des Verfahrens und den Annäherungsgrad $n = 3$ eine Fehlerabschätzung mit, die sich sowohl in der Herleitung als auch in der Anwendung durch besondere Einfachheit und Handlichkeit gegenüber den Abschätzungen von v. Mises und G. Schulz auszeichnet.

In der vorliegenden Arbeit wird die Fehleruntersuchung von Tollmien auf einen beliebigen Annäherungsgrad ausgedehnt. Eine ebenfalls von Tollmien angedeutete Möglichkeit zur Verschärfung der Fehlerabschätzung, deren Ergebnis für die extrapolative Form des Verfahrens und $n = 3$ dort angegeben ist, wird für beide Arten des Verfahrens allgemein durchgeführt. Anschließend wird die naheliegende Frage untersucht, welche der beiden nun vorliegenden Fehlerabschätzungen — die von v. Mises und G. Schulz einerseits und die verallgemeinerte und verschärfte Tollmieniense andererseits — die günstigere Fehlerschranke liefert. Beispiele erläutern die Anwendung der Fehlerformeln.

§ 1. Die einfache Fehlerabschätzung

In der Differentialgleichung

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

sei $f(x, y)$ für den im folgenden in Betracht kommenden Bereich von x und y stetig und genüge einer Lipschitzbedingung

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq M |y_2 - y_1| \quad (2)$$

Setzt man außerdem voraus, daß f eine stetige partielle Ableitung nach y hat, so kann (2) durch die schärfere Bedingung

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq M \quad (3)$$

ersetzt werden.

Das Adamssche Verfahren zur numerischen Integration der Differentialgleichung (1) wird in der extrapolativen und interpolativen Form, wie es in den genannten Arbeiten von v. Mises und G. Schulz beschrieben ist, als bekannt vorausgesetzt.

Zur Fehlerabschätzung benutzt Tollmien folgenden Satz aus der Theorie der Differentialgleichungen⁴⁾. Gegeben seien die Differentialgleichungen

$$y' = f(x, y); \quad \eta' = f(x, \eta) + \vartheta(x, \eta) \quad (4)$$

¹⁾ R. v. Mises, Zur numerischen Integration von Differentialgleichungen. Z. angew. Math. Mech. 10 (1930), S. 81.

²⁾ Günther Schulz, Interpolationsverfahren zur numerischen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen. Z. angew. Math. Mech. 12 (1932), S. 44.

³⁾ W. Tollmien, Über die Fehlerabschätzung beim Adamschen Verfahren zur Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen. Z. angew. Math. Mech. 18 (1938), S. 83. — Hinweise auf einzelne Formeln dieser Arbeiten werden kurz durch M, S, T mit der betreffenden Nummer gekennzeichnet.

⁴⁾ S. z. B. Kamke, Differentialgleichungen reeller Funktionen. Leipzig 1930. II. § 11, 52 Satz 2.

$f(x, y)$ und $\vartheta(x, y)$ seien in einem Gebiet G der x, y -Ebene stetige Funktionen und $f(x, y)$ erfülle überdies in G eine Lipschitz-Bedingung (2) mit einer einheitlichen Lipschitzkonstanten. Außerdem gelte in G die Abschätzung

$$|\vartheta(x, y)| \leq \varepsilon \quad \dots \quad (5)$$

Dann gilt für den Unterschied zweier Integrale der beiden Differentialgleichungen, die für $x = x_0$ gleiche Anfangswerte $y_0 = \eta_0$ haben,

$$|y - \eta| \leq \frac{\varepsilon}{M} (e^{M|x-x_0|} - 1) \quad \dots \quad (6),$$

und diese Abschätzung gilt solange wie y und η dem Gebiet G angehören, was nachträglich mit Hilfe der Abschätzung geprüft werden kann. Sind die Anfangsbedingungen der beiden Integrale nicht gleich, ist etwa $y(x_0) = y_0$, $\eta(x_0) = \eta_0$ und $|y_0 - \eta_0| \leq \delta_0$, so lautet die Abschätzung⁵⁾

$$|y - \eta| \leq \frac{\varepsilon}{M} (e^{M|x-x_0|} - 1) + \delta_0 e^{M|x-x_0|} \quad \dots \quad (7).$$

Dieser Satz ist offenbar geeignet, den Fehler abzuschätzen, der bei der Integration einer Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ begangen wird, wenn die rechte Seite durch eine Näherungsfunktion $f(x, y) + \vartheta(x, y)$ ersetzt wird. Einige Beispiele zur Illustration dieser Abschätzung werden in § 5 im Zusammenhang mit der verschärften Fehlerabschätzung betrachtet.

Die nach dem Adamsschen Verfahren für die äquidistanten Werte $x_v = x_0 + v \cdot h$ (h = Schrittweite, $v = 1, 2, \dots$) berechneten Funktionswerte y_v sind bekanntlich nicht Werte der gesuchten Lösung $y(x_v)$ der vorgelegten Differentialgleichung $y' = f(x, y)$, sondern sie sind Werte einer Näherungslösung \tilde{y} , die einer angenäherten Differentialgleichung

$$\tilde{y}' = \tilde{f}(x, \tilde{y}(x))$$

genügen. Um den Fehler $y - \tilde{y}$ nach (6) oder (7) abschätzen zu können, muß zunächst die Differenz $f - \tilde{f} = \vartheta$ abgeschätzt werden. Die Funktion $\tilde{f}(x, y)$ besteht aus Polynomen n . Grades. Bezeichnet man mit $P_n^{(v)}(x)$ ein Polynom n . Grades, welches für $x = x_v, x_{v-1}, \dots, x_{v-n}$ die Werte $F_v = f(x_v, \tilde{y}(x_v)), F_{v-1}, \dots, F_{v-n}$ annimmt, so ist beim interpolativen Verfahren⁶⁾ für \tilde{f} im Intervall $x_0 \dots x_n$ $P_n^{(n)}(x)$ und in den Intervallen $x_{v-1} \dots x_v$ ($v = n+1, \dots$) $P_n^{(v)}(x)$ zu nehmen. Beim extrapolativen Verfahren ist $P_n^{(v)}(x)$ in den Intervallen $x_v \dots x_{v+1}$ ($v = n+1, \dots$) zu nehmen; die Berechnung der Anfangswerte wird hier ja außerhalb des Verfahrens vorgenommen.

Der Unterschied $f - \tilde{f}$ ist also der Interpolationsfehler, der beim Ersatz der Funktion $f(x, y(x)) = F(x)$ durch das Näherungspolynom $P_n^{(v)}(x)$ begangen wird. Dieser beträgt aber

$$\vartheta(x) = \frac{(x - x_v)(x - x_{v-1}) \dots (x - x_{v-n})}{(n+1)!} F^{(n+1)}(\xi) \quad \dots \quad (8),$$

wobei ξ ein Mittelwert ist, der zwischen den zur Interpolation benutzten x -Werten liegt.

(8) ist jetzt für die in Frage kommenden Bereiche abzuschätzen. Setzt man

$$x - x_v = u h,$$

so folgt

$$\vartheta(u) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} u(u+1)(u+2) \dots (u+n) F^{(n+1)}(\xi) \quad \dots \quad (9).$$

Beim extrapolativen Verfahren kommen die Intervalle $x_v \dots x_{v+1}$ ($v = n, n+1, \dots$) in Frage, d. h. $u = 0 \dots 1$. Nun ist aber für $0 \leq u \leq 1$

$$u(u+1)(u+2) \dots (u+n) \leq (n+1)! \quad \dots \quad (10)$$

Ist ferner $|F^{(n+1)}(\xi)| \leq K_{n+1}$ für den gesamten Integrationsbereich $x_0 \dots x$, so gilt nach (7), wenn mit δ die absolute Fehlerschranke der Anfangswerte y_1, y_2, \dots, y_n bezeichnet wird, für $x \geq x_n$:

$$|y - \tilde{y}| \leq \delta e^{M(x-x_n)} + h^{n+1} \frac{K_{n+1}}{M^{n+1}} (e^{M(x-x_n)} - 1) \quad \dots \quad (11).$$

⁵⁾ S. K a m k e, a. a. O. II, § 11, 51, Satz 1. Der dortige Satz ist hier spezialisiert auf $\varepsilon_2 = 0$, $\xi = \bar{\xi}$.

⁶⁾ Es wird vorausgesetzt, daß die Anfangswerte beim interpolativen Verfahren in der bei G. S c h u l z angegebenen Weise auch mit einem Polynom n . Grades berechnet werden, so daß y_n noch mit zu den gesondert zu berechnenden Anfangswerten gehört.

Da das extrapolative Verfahren erst bei x_n beginnt, steht in den Exponenten $x - x_n$ an Stelle von $x - x_0$, und M ist nur für den Bereich $x_n \cdots x$ zu bestimmen, während für K_{n+1} der Gesamtbereich $x_0 \cdots x$ zu berücksichtigen ist ⁷⁾.

Um eine entsprechende Fehlerformel für das interpolative Verfahren zu gewinnen, muß man bedenken, daß die Interpolationspolynome $P_n^{(v)}(x)$ bei der Ermittlung der Anfangswerte in dem Bereich $x_0 \cdots x_n$, später in den Bereichen $x_{v-1} \cdots x_v$ ($v = n+1, \dots$) benutzt werden. Der Interpolationsfehler (8) bzw. (9) muß daher für diese Bereiche, d. h. für $-n \leq u \leq 0$ am Anfang und für $-1 \leq u \leq 0$ bei allen späteren Integrationsschritten abgeschätzt werden. Der gesamte überhaupt vorkommende Bereich für u wird also durch $-n \leq u \leq 0$ erfaßt.

Führt man in $\vartheta(u)$ die Substitution $u = v - \frac{n}{2}$ durch, so geht

$$f(u) = u(u+1)(u+2) \cdots (u+n)$$

im Falle eines geraden $n = 2m$ über in

$$g_1(v) = (v^2 - m^2)(v^2 - (m-1)^2) \cdots (v^2 - 1^2)v \quad -m \leq v \leq m \quad (12)$$

und im Falle eines ungeraden $n = 2m+1$ über in

$$g_2(v) = \left[v^2 - \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \right] \left[v^2 - \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 \right] \left[v^2 - \left(m - \frac{3}{2}\right)^2 \right] \cdots \left[v^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right] \left. \vphantom{g_2(v)} \right\} \quad -\frac{2m+1}{2} \leq v \leq \frac{2m+1}{2} \quad (13).$$

Die abzuschätzenden Funktionen $g_1(v)$ und $g_2(v)$ haben $n+1$ einfache Nullstellen bei $-\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}+1, \dots, \frac{n}{2}$; sie sind ungerade bzw. gerade Funktionen. Man kann sich also zur Ermittlung ihres größten absoluten Betrages auf positive $v \leq \frac{n}{2}$ beschränken. Außerdem kann man zeigen, daß das Maximum des absoluten Betrages stets in dem Intervall $\frac{n}{2}-1 \cdots \frac{n}{2}$ bzw. $-\frac{n}{2} \cdots -\frac{n}{2}+1$ liegt, also stets zwischen den beiden äußersten Nullstellen.

Zum Beweis gehen wir auf $u(u+1) \cdots (u+n)$ zurück und setzen $u+n = w$. Es genügt nun zu zeigen, daß die Funktion

$$h(w) = w(w-1) \cdots (w-n)$$

im Intervall $0 \cdots 1$ stets absolut größer ist als in jedem anderen Intervall $v \cdots v+1$ ($v = 1, 2, \dots, n-2$). Bezeichnet ϑ vorübergehend einen echten Bruch, so ist

$$Q = \frac{h(\vartheta)}{h(\vartheta+v)} = \frac{\vartheta(\vartheta-1) \cdots (\vartheta-n)}{(\vartheta+v)(\vartheta+v-1) \cdots (\vartheta+1)\vartheta(\vartheta-1) \cdots (\vartheta-(n-v))}$$

$$|Q| = \frac{(n-\vartheta)(n-1-\vartheta) \cdots (n-v+1-\vartheta)}{(v+\vartheta)(v-1+\vartheta) \cdots (1+\vartheta)} \geq \frac{(n-1)(n-2) \cdots (n-v)}{(v+1)!}$$

$$\geq \frac{(v+1)v(v-1) \cdots 2}{(v+1)!} = 1, \text{ wegen } n-v \geq 2.$$

Also

$$|h(\vartheta)| \geq |h(v+\vartheta)|$$

für

$$v = 1, 2, \dots, n-2.$$

Entsprechend läßt sich zeigen, daß für $v \leq n-2$

$$|h(n-1+\vartheta)| \geq |h(v+\vartheta)|.$$

Das gesuchte Maximum des absoluten Betrages von $h(w)$ liegt also im Intervall $0 \leq w \leq 1$ bzw. $n-1 \leq w \leq n$; welches der beiden Intervalle wir betrachten, ist nach den Ausführungen über $g_1(v)$ und $g_2(v)$ gleichgültig.

Es gilt daher nach (7) mit Einschluß der Anfangswerte die Abschätzung:

$$|y - \tilde{y}| \leq \varepsilon_n \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{K_{n+1}}{M} (e^{M(x-x_0)} - 1) \quad (14)$$

⁷⁾ Für $n = 3$ geht (11) in T (56) über. T (56) enthält einen Druckfehler: es muß δ an Stelle von $\frac{\delta}{M}$ heißen. Das gleiche gilt für T (56a).

mit

$$\varepsilon_n = \text{Max}(|f(u)|) \quad -1 \leq u \leq 0 \quad \dots \quad (15).$$

Die numerische Berechnung ergibt die Werte

n	1	2	3	4	5
ε_n	0,250	0,385	1	3,55	16,7

(14) stimmt für $n=3$ mit T (47) überein.

Die Abschätzungsformeln (11) und (14) zeigen die bekannte Tatsache, daß das interpolative Verfahren wesentlich genauer ist als das extrapolative Verfahren. Wenn man den Fehler der Anfangswerte beim extrapolativen Verfahren unberücksichtigt läßt, unterscheiden sich beide

Formeln nur um den Faktor $\frac{\varepsilon_n}{(n+1)!}$, der folgende Werte hat:

$n =$	1;	2;	3;	4;	5;
$\frac{\varepsilon_n}{(n+1)!} =$	0,125;	0,0642;	0,0417;	0,0296;	0,0232

§ 2. Die verschärfte Fehlerabschätzung

In der zit. Arbeit erwähnt Tollmien eine Möglichkeit zur Verschärfung der durch (6) gegebenen Abschätzung, die darin besteht, daß an Stelle der bisherigen Definition für ε die neue tritt:

$$\left| \int_{x_0}^x \vartheta(x) dx \right| \leq \varepsilon |x - x_0|.$$

Für das extrapolative Verfahren und $n=3$ gibt Tollmien das Ergebnis dieser Verschärfung an.

Diese Verschärfung soll hier etwas allgemeiner untersucht und auf beide Arten des Adamschen Verfahrens angewandt werden. Wir betrachten wie in § 1 die beiden Differentialgleichungen

$$y' = f(x, y), \quad \eta' = f(x, \eta) + \vartheta(x, \eta)$$

mit in G stetigen Funktionen $f(x, y)$ und $\vartheta(x, y)$; $f(x, y)$ erfülle die Lipschitz-Bedingung. Man kann die erste Differentialgleichung als die zu lösende, die zweite als die gelöste genäherte Differentialgleichung auffassen. Wir betrachten also die Lösung $\eta(x)$ als bekannt und den Fehler $|y - \eta|$ als gesucht. Wendet man das Picardsche Iterationsverfahren auf $y' = f(x, y)$ so an, daß $\eta(x)$ die Ausgangslösung ist, also

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, \eta(x)) dx$$

und

$$y_\nu(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_{\nu-1}(x)) dx,$$

so kommt man in bekannter Weise zu der Abschätzung

$$|y - \eta| \leq \frac{\varepsilon}{M} (e^{M(x-x_0)} - 1) \quad \dots \quad (18),$$

in der die Konstante ε durch

$$\left| \int_{x_0}^x \vartheta(x, \eta(x)) dx \right| \leq \varepsilon |x - x_0|$$

oder auch

$$\left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x \vartheta(x, \eta(x)) dx \right| \leq \varepsilon \quad \dots \quad (19)$$

definiert ist.

Danach ist ε nicht mehr wie bei der einfachen Fehlerabschätzung das absolute Maximum der Funktion $\vartheta(x, \eta(x))$, sondern das absolute Maximum des Integralmittels dieser Funktion im Intervall $x_0 \dots x$.

Ist speziell $\vartheta(x, \eta(x)) \geq 0$ in $x_0 \dots x$ und monoton fallend bzw. wachsend, so liegt das absolute Maximum des Integralmittels bei x_0 bzw. x ; ist $\vartheta(x, \eta(x)) \leq 0$ und monoton fallend bzw. wachsend, so liegt das absolute Maximum umgekehrt bei x bzw. x_0 . Ist $\vartheta(x, \eta(x))$ in $x_0 \dots x$ von wechselndem Vorzeichen und monoton, so liegt das absolute Maximum des Integralmittels entweder bei x_0 oder bei x . Ist schließlich $\vartheta(x, \eta(x))$ nicht monoton, so liegt das absolute Maxi-

mum im Innern des Intervalles $x_0 \cdots x$, und zwar an einer Stelle ξ , für die der Funktionswert gleich dem Integral ist, denn aus

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(x) dx \right) = 0$$

folgt

$$f(\xi) = \frac{1}{\xi - x_0} \int_{x_0}^{\xi} f(x) dx \quad \dots \quad (20).$$

Bei der Anwendung auf das Adamssche Integrationsverfahren tritt noch die Vereinfachung ein; daß ϑ nur von x und nicht von y bzw. η abhängt.

Die Anwendung der verschärften Fehlerabschätzung wird durch folgende Eigenschaft des Integralmittels erleichtert. Wir betrachten eine nirgend negative periodische Funktion $f(x)$ (Periodenlänge λ), deren einzige Nullstellen bei $\nu\lambda$ ($\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) liegen, außerdem sei $f(x)$ im Innern jedes Intervalles $\nu\lambda \cdots (\nu+1)\lambda$ differenzierbar und habe dort genau ein Maximum. Das Integralmittel dieser Funktion

$$J(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(x) dx$$

hat nach (20) Minima und Maxima an Stellen ξ_ν , die sich aus der Bedingung ergeben

$$f(\xi_\nu) = \frac{1}{\xi_\nu} \int_0^{\xi_\nu} f(x) dx \quad \dots \quad (21).$$

Dort also, wo die Kurven $f(x)$ und $J(x)$ sich schneiden, liegt ein Maximum oder ein Minimum von $J(x)$. Da

$$J''(\xi_\nu) = \frac{f'(\xi_\nu)}{\xi_\nu},$$

haben $f'(x)$ und $J''(x)$ für $\xi_\nu > 0$ gleiches Vorzeichen. Dort also, wo $J(x)$ den aufsteigenden Ast von $f(x)$ schneidet, liegt immer ein Minimum, dort, wo es den absteigenden Ast schneidet, liegt ein Maximum.

Weiter folgt aus (21), daß die Maxima mit wachsendem x beständig fallen und die Minima beständig wachsen,

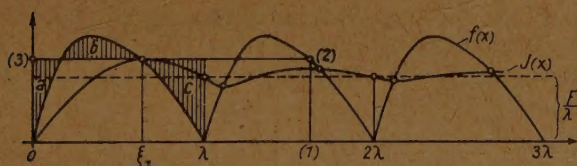


Bild 1

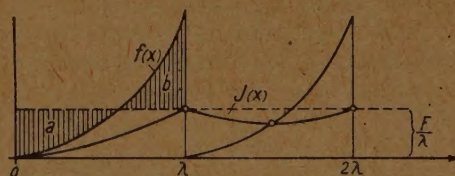


Bild 2

denn das erste Maximum liegt auf dem absteigenden Kurvenast bei ξ_1 und ist durch die Gleichheit der Flächeninhalte a und b bestimmt. Das zweite Maximum kann nun aber nicht die gleiche Größe haben, da dann das Rechteck 0, (1), (2), (3) (s. Bild 1) einen um c größeren Flächeninhalt hätte als $f(x)$ bis zur Stelle (1). Also muß das zweite Maximum kleiner sein als das erste und so fort. In ähnlicher Weise kann das Anwachsen der Minima klargemacht werden. Schließlich gilt, wenn $n > 0$ ganz und $0 < \vartheta < 1$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} J(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(n + \vartheta)\lambda} \int_0^{(n + \vartheta)\lambda} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n + \vartheta)\lambda} \left(nF + \int_{n\lambda}^{n\lambda + \vartheta\lambda} f(x) dx \right) \\ &= \frac{F}{\lambda} = J(\lambda), \quad \text{mit} \quad F = \int_0^\lambda f(x) dx, \end{aligned}$$

so daß $J(x)$ eine um die Gerade $y = \frac{F}{\lambda}$ mit abnehmenden Amplituden pendelnde Kurve ist. In dem Fall, daß $f(x)$ in jedem Intervall monoton wächst, sind alle Maxima gleich F/λ und liegen an den Intervallenden (s. Bild 2).

Beim extrapolativen Verfahren ist nun nach (8)

$$\vartheta(x) = p_n^{(v)} \frac{F^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \quad x_0 \leq \xi \leq x,$$

wobei im Intervall $x_v \cdots x_{v+1}$ ($v = n, n+1, \dots$)

$$p_n^{(v)} = (x - x_v)(x - x_{v-1}) \cdots (x - x_{v-n}).$$

gilt. Weiter ist, da die Integration bei x_n beginnt,

$$\left| \frac{1}{x - x_n} \int_{x_n}^x \vartheta(x) dx \right| \leq \frac{1}{x - x_n} \int_{x_n}^x |\vartheta(x)| dx \leq \frac{1}{x - x_n} \frac{K_{n+1}}{(n+1)!} \int_{x_n}^x p_n^{(v)}(x) dx \quad (22),$$

wenn

$$|F^{(n+1)}(\xi)| \leq K_{n+1}$$

für den gesamten Integrationsbereich $x_0 \cdots x$ gilt. Nun ist $p_n^{(v)}(x)$ in jedem Intervall $x_v \cdots x_{v+1}$ monoton wachsend, so daß der in Bild 2 dargestellte Fall vorliegt. Es ist demnach:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{x - x_n} \int_{x_n}^x p_n^{(v)}(x) dx &\leq \frac{1}{x_{n+1} - x_n} \int_{x_n}^{x_{n+1}} (x - x_n)(x - x_{n-1}) \cdots (x - x_0) dx \\ &= h^{n+1} \int_0^1 u(u+1) \cdots (u+n) du = h^{n+1} (n+1)! a_{n+1} \end{aligned} \right\} \dots (23),$$

wenn man $x - x_n = uh$ und die in der Integrationsformel für das extrapolative Verfahren auftretenden Koeffizienten a_n

$$a_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 u(u+1) \cdots (u+n) du \dots \dots \dots (24),$$

die bekanntlich sämtlich < 1 sind ($a_1 = 1/2$, $a_2 = 5/12$, $a_3 = 3/8$, ...), einführt. Also ergibt (22)

$$\left| \frac{1}{x - x_n} \int_{x_n}^x \vartheta(x) dx \right| \leq h^{n+1} (n+1)! a_{n+1} \dots \dots \dots (25),$$

und die verschärfte Fehlerabschätzung für das extrapolative Verfahren lautet nach (7) und (19)

$$|y - \tilde{y}| \leq \delta e^{M(x-x_n)} + a_{n+1} h^{n+1} \frac{K_{n+1}}{M} (e^{M(x-x_n)} - 1) \dots \dots \dots (26).$$

Der durch die Anfangswerte bedingte Fehler δ bleibt von der Verschärfung unberührt. Der zweite Summand in (26) ist also verglichen mit der einfachen Abschätzung (11) um die Koeffizienten $a_v < 1$ verbessert worden. Für $n=3$ geht (26) in T (56a) über⁸⁾.

Führt man für das interpolative Verfahren dieselbe Überlegung durch, so ist wegen (8)

$$\left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x \vartheta(x) dx \right| \leq \frac{1}{x - x_0} \frac{K_{n+1}}{(n+1)!} \int_{x_0}^x |q_n^{(v)}(x)| dx \dots \dots \dots (27)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} q_n^{(v)} &= (x - x_v)(x - x_{v-1}) \cdots (x - x_{v-n}) & x_{v-1} \leq x \leq x_v & (v = n+1, n+2, \dots) \\ q_n^{(v)} &= (x - x_n)(x - x_{n-1}) \cdots (x - x_0) & x_0 \leq x \leq x_n \end{aligned} \right\} (28).$$

Aus den Überlegungen von § 1 folgte nun, daß $q_n^{(v)}(x)$ im Intervall $x_0 \cdots x_1$ und $x_{n-1} \cdots x_n$ an jeder Stelle größer ist, als an entsprechenden Stellen der anderen Intervalle zwischen x_0 und x_n . Außerdem ist der Verlauf von $q_n^{(v)}(x)$ in den Intervallen ab x_n derselbe wie im Intervall $x_{n-1} \cdots x_n$. Führt man daher die Funktion $Q_n^{(v)}(x)$ ein, die in allen Intervallen mit Ausnahme des ersten $x_0 \cdots x_1$ denselben Verlauf haben soll wie $|q_n^{(v)}(x)|$ in $x_{n-1} \cdots x_n$ bzw. den späteren Intervallen, während sie im ersten Intervall mit $|q_n^{(v)}(x)|$ übereinstimmen soll, so gilt

$$|q_n^{(v)}(x)| \leq Q_n^{(v)}(x)$$

und

$$\left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x \vartheta(x) dx \right| \leq \frac{1}{x - x_0} \frac{K_{n+1}}{(n+1)!} \int_{x_0}^x Q_n^{(v)}(x) dx \dots \dots \dots (29).$$

⁸⁾ Vgl. Fußnote 7.

Da außerdem

$$\frac{d}{dx} \{(x - x_n)(x - x_{n-1}) \cdots (x - x_0)\}_{x=x_0} = \frac{d}{du} \{u(u-1) \cdots (u-n)\}_{u=0} = n!$$

und

$$\frac{d}{dx} \{(x - x_n)(x - x_{n-1}) \cdots (x - x_0)\}_{x=x_{n-1}} = \frac{d}{du} \{(u-1)u(u+1) \cdots (u+n-1)\}_{u=0} = (n-1)!$$

ist der Anstieg der Funktion $Q_n^{(v)}(x)$ bei $x=x_0$ größer als zu Beginn aller späteren Intervalle. Man hat also einen Verlauf wie ihn Bild 3 andeutet. Daß der erste und zweite Bogen von Q spiegelbildlich zueinander sind, war schon in § 1 bewiesen. Man überlegt nun leicht, daß das Integralmittel von Q das größte Maximum wieder im 1. Intervall erreicht, denn wenn (s. Bild 3)

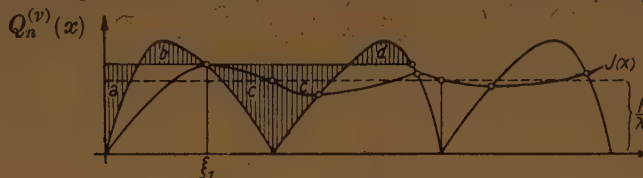


Bild 3

$a=b$, das erste Maximum also bei ξ_1 liegt, so kann das zweite nicht die gleiche Größe erreichen, da $2c > d$, denn es ist $c > a = b = d$. Die folgenden Maxima bilden wieder eine fallende Folge, so daß gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x Q_n^{(v)}(x) dx &\leq \text{Max} \left(\frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x |(x - x_n)(x - x_{n-1}) \cdots (x - x_0)| dx \right) \quad x_0 \leq x \leq x_1 \\ &\leq \text{Max} \left(h^{n+1} \frac{1}{u} \int_0^u |u(u-1) \cdots (u-n)| du \right) \quad 0 \leq u \leq 1, \end{aligned}$$

wenn $x - x_0 = uh$ gesetzt wird. Demnach geht (29) über in

$$\left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x \vartheta(x) dx \right| \leq h^{n+1} \frac{K_{n+1}}{(n+1)!} \text{Max} \left(\frac{1}{u} \int_0^u |u(u-1) \cdots (u-n)| du \right) \quad (30).$$

Setzt man noch

$$\text{Max} \left(\frac{1}{u} \int_0^u |u(u-1) \cdots (u-n)| du \right) = \Theta_n \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (31),$$

so lautet die verschärfte Abschätzung für das interpolative Verfahren

$$|y - \tilde{y}| \leq \Theta_n \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \frac{K_{n+1}}{M} (e^{M(x-x_0)} - 1) \quad (32).$$

In der Fehlerabschätzung (14) stand ε_n an Stelle von Θ_n . Für (15) kann auch

$$\varepsilon_n = \text{Max} |u(u-1) \cdots (u-n)| \quad 0 \leq u \leq 1$$

geschrieben werden, da das Maximum von $u(u+1) \cdots (u+n)$ für $-1 \leq u \leq 0$ dasselbe ist wie das von $|u(u-1) \cdots (u-n)|$ in $0 \leq u \leq 1$. Jetzt tritt an Stelle von ε_n das Maximum des Integralmittels $\Theta_n < \varepsilon_n$, so daß $\frac{\Theta_n}{\varepsilon_n} < 1$ die Verbesserung in der Fehlerabschätzung bedeutet.

Die folgende Tabelle enthält eine Gegenüberstellung dieser Werte:

n	1	2	3	4
ε_n	0,25	0,385	1	3,55
Θ_n	0,188	0,296	0,776	2,84
$\frac{\varepsilon_n}{\Theta_n}$	0,75	0,768	0,776	0,800

Aus den gegebenen Fehlerabschätzungen (11), (14) bzw. (26), (32) folgt, daß der Fehler von der $(n+1)$ -ten Ordnung in h ist und daher

$$\lim_{h \rightarrow 0} (y - \tilde{y}) = 0,$$

so daß die Konvergenz des Verfahrens gegen die wahre Lösung gesichert ist.

§ 3. Vergleich der Abschätzungen für das extrapolative Verfahren

Die von v. Mises gegebene Fehlerabschätzung für das extrapolative Verfahren lautet mit den hier benutzten Bezeichnungen (s. M (34))

$$|y - \tilde{y}| \leq \delta z^v + h^{n+1} \frac{a_{n+1}}{A_n} \frac{K_{n+1}}{M} (z^v - 1); \quad v > n \quad (34).$$

Darin ist v die Schrittzahl, $vh = x - x_0$ und

$$A_n = \sum_{\lambda=0}^n |a_{n,\lambda}| \quad (35).$$

Die $a_{n,\lambda}$ sind die in der Integrationsformel für das extrapolative Verfahren auftretenden Koeffizienten, sofern man nach den Funktionswerten F_λ an Stelle der Differenzen $\nabla^v F_\lambda$ ordnet. Für sie gilt

$$a_{n,\lambda} = (-1)^{n-\lambda} \sum_{q=n-\lambda}^n \binom{n}{q-\lambda} a_q \quad (36),$$

z ist die kleinste reelle Wurzel der Gleichung

$$z^n (z - 1) = hM \sum_{\lambda=0}^n |a_{n,\lambda}| z^\lambda \quad (37),$$

die >1 ist. Die z -Werte können für eine Reihe von n - und hM -Werten aus den Kurvendarstellungen bei v. Mises näherungsweise entnommen werden.

Es sollen die Abschätzungen (34) und (26) miteinander verglichen werden. Man muß dazu bedenken, daß

$$v = \frac{x - x_0}{h}$$

die Gesamtzahl der Integrationsschritte und

$$\mu = \frac{x - x_n}{h}$$

die Zahl der Integrationsschritte von x_n ab bedeutet, so daß $n + \mu = v$ gilt.

Das Verhältnis der beiden ersten Summanden in (26) und (34) ist dann

$$v = \frac{z^v}{e^{\mu h M}} = z^n \left(\frac{z}{e^{h M}} \right)^\mu = z^n \cdot p^\mu \quad (38),$$

und es ist für alle $\mu > 1$, sofern $z > e^{h M}$ ist. Für $h \rightarrow 0$ folgt $v=1$, da $z=1$. Durch Differentiation von (37) unter Berücksichtigung von (35) ergibt sich

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{dz}{dh M} = A_n \quad (39).$$

Da aber, wie aus (36) folgt

$$\sum_{\lambda=0}^n a_{n,\lambda} = 1 \quad (40)$$

und daher $A_n > 1$ sein muß, haben die Kurven $z = z(hM)$ für $hM=0$ einen größeren Anstieg als $z = e^{hM}$, so daß für hinreichend kleine hM $z > e^{hM}$ ist. Da andererseits, wie aus (37) ersichtlich,

hM mit wachsendem z von erster Ordnung unendlich wird, muß für hinreichend große hM $z < e^{hM}$ sein. Die numerische Berechnung ergibt

$$z > e^{hM} \quad \text{für} \quad \begin{cases} n=1 & ; & 2 & ; & 3 & ; & 4 \\ hM < 0,975; & 1,46; & 1,78; & 2,01 \end{cases} \quad (41).$$

Da die praktisch vorkommenden hM -Werte weit unterhalb der Schranken (41) liegen, ist tatsächlich stets $v > 1$, und zwar um so größer je größer μ wird.

Auf Bild 4 ist der Quotient p^μ für $\mu=1$ und $\mu=20$ dargestellt. Man sieht, daß der 1. Summand der Abschätzung (34) um so mehr das entsprechende Glied der Abschätzung (26) überwiegt,

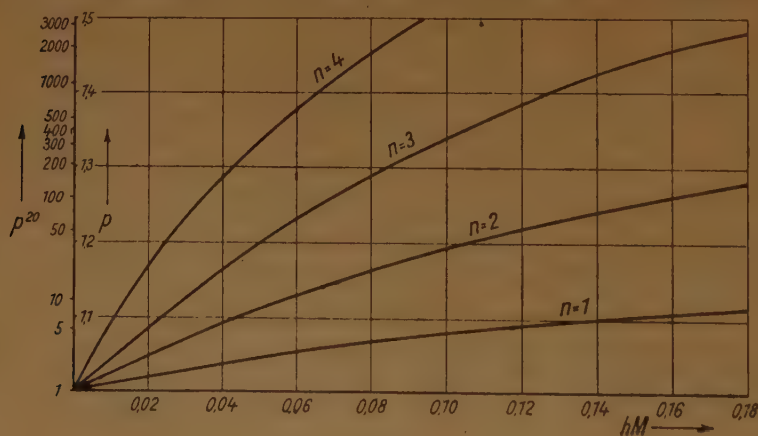


Bild 4

je größer hM , n und μ sind. Insbesondere wird die von Misesche Abschätzung für große μ praktisch nicht mehr brauchbar, da die Fehler um Zehnerpotenzen größer werden können als nach (26). Hinzu kommt, daß der Quotient p^μ noch mit $z^n > 1$ zu multiplizieren ist.

Für das Verhältnis der 2. Summanden von (26) und (34) gilt

$$\lambda_e = A_n \frac{z^{\mu+n} - 1}{e^{\mu h M} - 1} \quad (42).$$

Dann ist, wenn (41) vorausgesetzt wird,

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \lambda_e = 0 \quad (43),$$

d. h. für große Schrittzahlen μ wird auch das Verhältnis λ_e beliebig klein.

Für $h \rightarrow 0$ ergibt sich

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lambda_e = A_n \frac{\mu}{v} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d h M}{d z}$$

und wegen (39)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lambda_e = \frac{\mu}{n + \mu} < 1.$$

Die numerische Berechnung ergibt, daß auch für alle $h > 0$, $\lambda_e < 1$ ist, sofern die Bedingung (41) erfüllt ist.

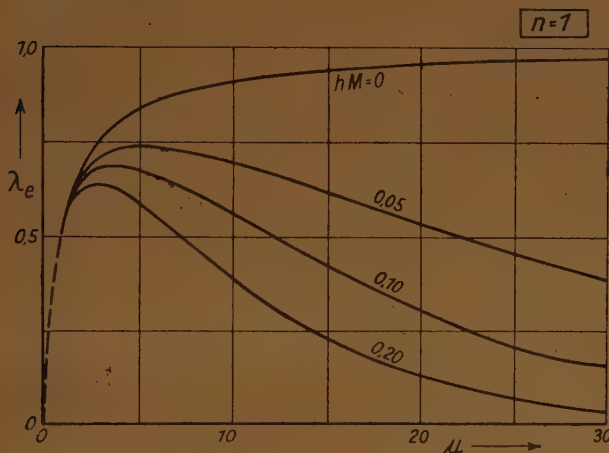


Bild 5

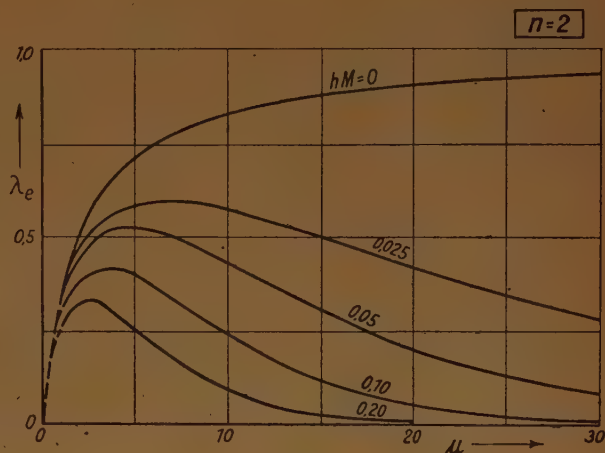


Bild 6

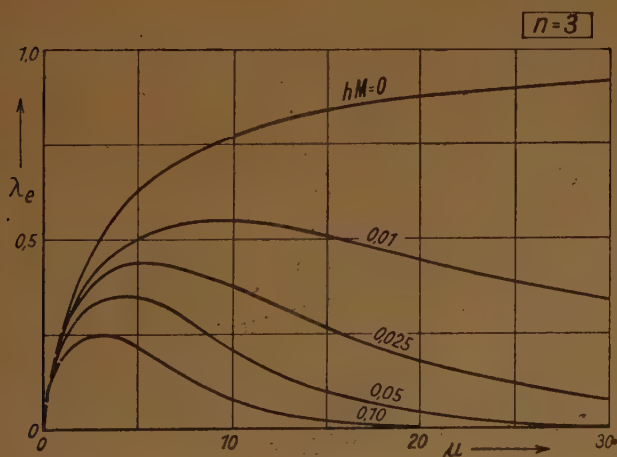


Bild 7

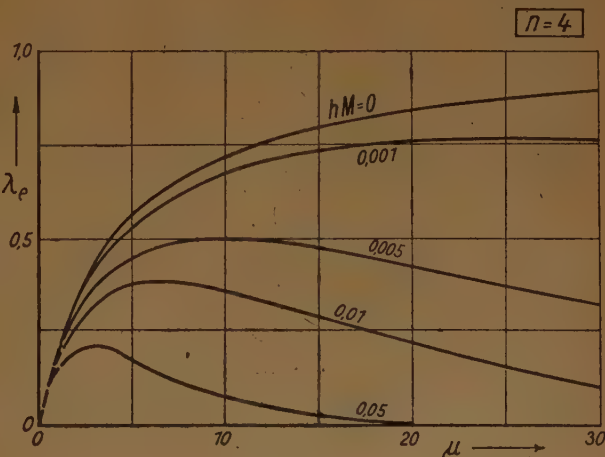


Bild 8

Auf den Bildern 5—8 ist das Verhältnis λ_e für $n = 1, 2, 3, 4$, $\mu \leq 30$, $hM \leq 0,2$ dargestellt. Die Kurven zeigen das (43) entsprechende Abklingen für große μ . Sie liegen für alle betrachteten n und hM unter der $hM = 0$ entsprechenden Kurve. Das Verhältnis λ_e wird außer mit wachsender Schrittzahl auch mit wachsendem Grad n und wachsender Schrittweite h immer günstiger für (26). Wegen $v > n$ sind diese Kurven erst ab $\mu = 1$ zu betrachten.

Ein Zahlenbeispiel: Für $n=3$, $hM=0,05$, $\mu=30$ ergibt sich $\lambda_e=0,00865$, $v=478$, d. h. der 2. Summand in (34) ist rund 115mal, der 1. Summand 478mal größer als die entsprechenden Glieder von (26).

Insgesamt ist also die Abschätzung (26) unter der praktisch immer erfüllten Bedingung (41) für alle n und μ günstiger als die Abschätzung (34); insbesondere wird (26) für große Schrittzahlen von geringerer Ordnung unendlich als (34). Für nach Null gehende Schrittweite h gehen beide Abschätzungen für große Schrittzahlen ineinander über.

§ 4. Vergleich der Abschätzungen für das interpolative Verfahren

Nach G. Schulz (43) gilt für das interpolative Verfahren

$$|y - \tilde{y}| \leq \varepsilon z^v + h^{n+1} \frac{|b_{n+1}|}{A_n^*} \frac{K_{n+1}}{M} (z^v - 1) \quad (44)$$

$v > n$

mit

$$A_n^* = \sum_{\lambda=0}^n |b_{n,\lambda}| \quad (45)$$

Die $b_{n,\lambda}$ sind die den $a_{n,\lambda}$ entsprechenden Koeffizienten des interpolativen Verfahrens, für die

$$b_{n,\lambda} = (-1)^{n-\lambda} \sum_{\varrho=\lambda}^n \binom{\varrho}{n-\lambda} b_{\varrho} \quad (46)$$

gilt, (40) entsprechend folgt hieraus

$$\sum_{\lambda=0}^n b_{n,\lambda} = 1 \quad (47)$$

so daß auch $A_n^* > 1$ für $n > 1$ ist. z ist die kleinste reelle Wurzel der Gleichung

$$z^{n-1}(z-1) = hM \sum_{\lambda=0}^n |b_{n,\lambda}| z^{\lambda} \quad (48)$$

die > 1 ist.

v ist wieder die Gesamtschrittzahl und ε eine Schranke für die absoluten Beträge der Fehler $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ der Werte $y(x_0), y(x_1), \dots, y(x_n)$ ⁹⁾.

Obere Schranken für $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ hat man nach S(72) in den positiven Zahlen Y_v , die aus den Gleichungen

$$Y_v - hM \sum_{k=0}^n |\sigma_{v,k}| Y_k = d_v \quad (v = 1, 2, \dots, n)$$

zu bestimmen sind. Da $Y_v > d_v$, soll zum Vergleich der Fehlerabschätzung (32) mit (44) an Stelle der Y_v d_v genommen werden. Die Größen d_v sind definiert durch S(74):

$$d_v = h^{n+2} K_{n+1} \sum_{k=1}^v \left| \int_{k-1}^k \binom{u}{n+1} du \right| \quad (49)$$

Führt man die in der Integrationsformel zur Bestimmung der Anfangswerte auftretenden Koeffizienten

$$B_{m,\lambda} = \frac{1}{\lambda!} \int_{-1}^0 (u-m)(u-m+1) \cdots (u-m+\lambda-1) du \quad (50)$$

ein, so geht (49) über in

$$d_v = h^{n+2} K_{n+1} \sum_{k=1}^v |B_{k-1,n+1}| \quad (51)$$

Es kann demnach für ε der Wert d_n genommen werden. Das Verhältnis λ_1 der Fehlerabschätzung (32) zu (44) ist dann

$$\lambda_1 = \frac{e^{v h M} - 1}{\alpha_n h M z^v + \beta_n (z^v - 1)} \quad (52)$$

⁹⁾ Da hier (vgl. Fußnote 6) y_n mit zu den Anfangswerten gehört, ist ε als Schranke der Werte $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ und nicht wie bei G. Schulz für $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}$ aufzufassen. ε und ε_n sind von den ebenso bezeichneten Größen in § 1 und § 2 zu unterscheiden.

mit

$$\alpha_n = \frac{(n+1)!}{\Theta_n} \sum_{k=1}^n |B_{k-1, n+1}|; \quad \beta_n = \frac{(n+1)!}{\Theta_n} \cdot \frac{b_{n+1}}{A_n^*} \dots \dots \dots (53).$$

Man findet:

n	1	2	3	4
α_n	0,885	1,69	2,10	2,23
β_n	0,885	0,723	0,577	0,442

Auch hier ist

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \lambda_i = 0 \quad \text{für} \quad z > e^{hM} \dots \dots \dots (55).$$

Da die Kurven $z = z(hM)$, wie aus (48) folgt, für $hM = \frac{1}{|b_{n,n}|} = \frac{1}{a_n}$ einen Pol haben, muß für große hM $z > e^{hM}$ erfüllt sein; wegen der Konvergenzbedingung S(13) bleibt $hM < 1/a_n$. Da außerdem entsprechend (39)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{dz}{dhM} = A_n^* > 1; \quad n > 1 \dots \dots \dots (56)$$

gilt, ist auch wegen

$$\left(\frac{de^{hM}}{dhM} \right)_{hM=0} = 1$$

für kleine hM die Bedingung $z > e^{hM}$ erfüllt. Für $n=1$ haben beide Kurven den gleichen Anstieg. Eine Reihenentwicklung der $n=1$ entsprechenden z -Kurve

$$z = \frac{1 + \frac{hM}{2}}{1 - \frac{hM}{2}} = 1 + hM + \frac{(hM)^2}{2} + \frac{(hM)^3}{4} + \frac{(hM)^4}{8} + \dots$$

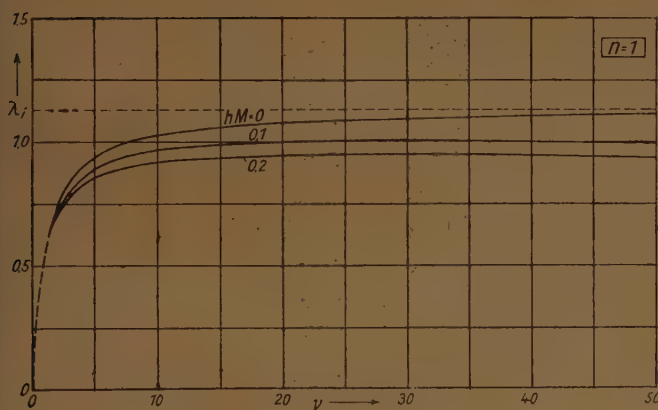


Bild 9

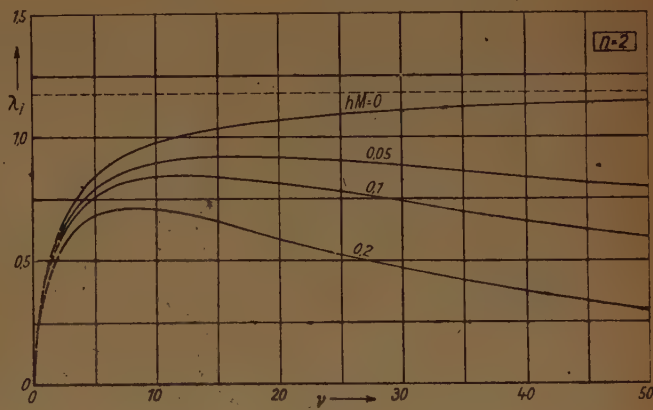


Bild 10

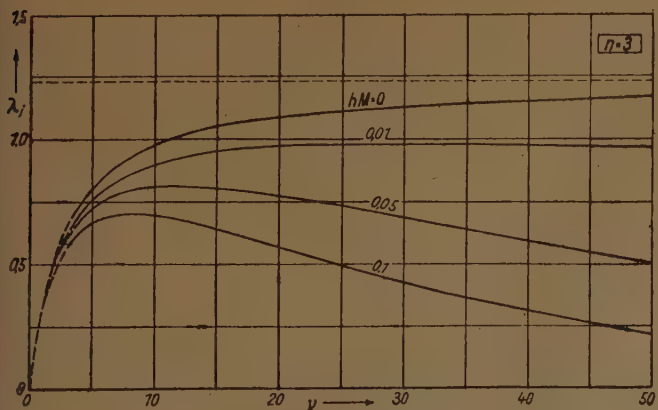


Bild 11

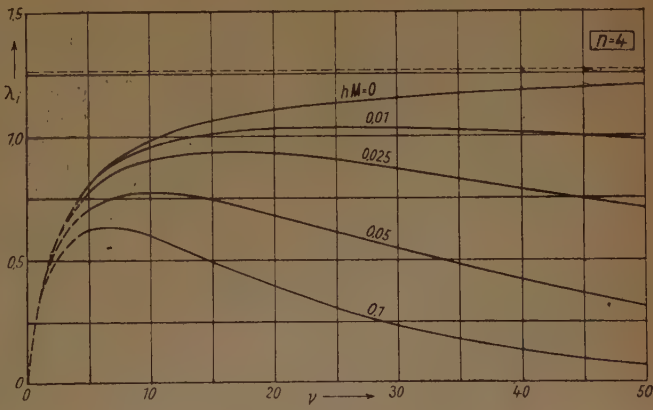


Bild 12

zeigt aber im Vergleich mit der Entwicklung von e^{hM} , daß der Unterschied

$$z - e^{hM} = \frac{(hM)^3}{12} + \dots > 0$$

ist. Soll also die Bedingung $z > e^{hM}$ für $0 \leq hM \leq \frac{1}{a_n}$ verletzt werden, so müßte in diesem Intervall ein mindestens zweimaliges Schneiden der z -Kurven mit e^{hM} eintreten, was nicht der Fall ist. Im Gegensatz zum extrapolativen Verfahren ist also $z > e^{hM}$ stets erfüllt, d. h. mit wachsender Schrittzahl wird die Fehlerabschätzung (32) in jedem Falle günstiger als (44).

Auf den Bildern 9–12 ist das Verhältnis λ_i für $n = 1, 2, 3, 4$ $hM \leq 0,2$; $\nu \leq 50$ dargestellt. Man erkennt das Absinken von λ_i mit wachsender Schrittzahl ν , welches außerdem um so eher erfolgt, je größer hM und n sind. Verglichen mit den Bildern 5–8 sieht man, daß die Unterschiede beider Fehlerschätzungen jetzt geringer sind.

Für verschwindendes hM erhält man wegen (56)

$$\lim_{hM \rightarrow 0} \lambda_i = \frac{\nu}{\alpha_n + \beta_n A_n^* \nu} \dots \dots \dots (57).$$

Auch dieser Grenzfall ist auf den Bildern 9–12 dargestellt. Da alle Kurven unterhalb dieser Grenzkurve liegen und da diese Grenzkurve für $\nu \rightarrow \infty$ dem Wert

$$\frac{1}{\beta_n A_n^*} = \frac{\Theta_n}{(n+1)! |b_{n+1}|} > 1$$

zustrebt, kann das Verhältnis λ_i für sehr kleine hM vorübergehend etwas größer als 1 werden; wie auch aus den Bildern 9–12 ersichtlich ist. Wegen $\nu > n$ sind die Kurven bis $\nu = n$ gestrichelt.

Ein Zahlenbeispiel: Für $n = 4$, $hM = 0,1$, $\nu = 50$ nach Bild 12 $\lambda_i = 0,07$, d. h. Abschätzung (32) ist rund 14mal besser als (44).

Die verallgemeinerte Tollmiensche Fehlerabschätzung, die sowohl in der Herleitung als auch in der Handhabung einfacher ist als die entsprechende Abschätzung von v. Mises und G. Schulz, erweist sich für das extrapolative Verfahren unter der praktisch immer erfüllten Bedingung (41) stets als wesentlich günstiger und für das interpolative Verfahren mit Ausnahme sehr kleiner hM -Werte und beschränkte Schrittzahlen, für die beide Abschätzungen die gleiche Größenordnung besitzen, als günstiger als die Fehlerschranke von v. Mises und G. Schulz. Insbesondere wird für das extrapolative Verfahren unter der Bedingung (41), für das interpolative Verfahren stets für große Schrittzahlen der Unterschied beider Fehlerabschätzungen beliebig groß.

§ 5. Beispiele zur allgemeinen Fehlerabschätzung

Um die Güte der gegebenen Fehlerschranken zu prüfen, soll zunächst die grundlegende Beziehung (6) mit (5) und mit der Verschärfung (19) an drei Beispielen behandelt und mit dem wahren Fehler verglichen werden. Im Hinblick auf das Adamssche Verfahren soll ϑ nur von x abhängen.

1. Beispiel: Es seien die Differentialgleichungen gegeben:

$$y' = \frac{y}{x}; \quad \eta' = \frac{\eta}{x} + x \dots \dots \dots (58).$$

Die gemeinsame Anfangsbedingung sei $x_0 = y_0 = 1$. Gesucht sei der Unterschied $|y - \eta|$ bei $x = 2$. Als Gebiet G kann der Parallelstreifen $1 \leq x \leq 2$ betrachtet werden. Man kann $M = 1$ und nach der einfachen Abschätzung, da $\vartheta(x) = x$ ist,

$$|\vartheta(x)| \leq 2 = \varepsilon$$

nehmen. Dann gilt nach (5), (6)

$$|y - \eta| \leq 2(e^{x-1} - 1).$$

Nach der verschärften Abschätzung (18), (19) ist

$$\varepsilon = \text{Max} \left(\frac{1}{x-1} \int_1^x x dx \right) = \text{Max} \left(\frac{x+1}{2} \right) = \frac{3}{2},$$

so daß

$$|y - \eta| \leq \frac{3}{2}(e^{x-1} - 1).$$

Der wahre Fehler ist

$$|y - \eta| = x^2 - x,$$

so daß der Fehler f bei $x=2$ in der Reihenfolge einfache Abschätzung, verschärfte Abschätzung, wahrer Fehler folgende Werte annimmt:

$$f \leq 3,44; \quad f \leq 2,58; \quad f = 2.$$

2. Beispiel: Während im 1. Beispiel $\vartheta(x)$ monoton wachsend war und das Maximum des Integralmittels demzufolge am Ende des Integrationsbereiches lag, soll jetzt ein Beispiel mit nicht monotonem $\vartheta(x)$ betrachtet werden. Es sei

$$y' = y; \quad \eta' = \eta + \sin x \dots \dots \dots (59).$$

Anfangsbedingung sei $x_0=0, y_0=1$. Es kann wieder $M=1$ genommen werden. Gesucht sei der Fehler bei $x=\pi$.

Als Gebiet G kann der Parallelstreifen $0 \leq x \leq \pi$ betrachtet werden. Da

$$|\vartheta(x)| = |\sin x| \leq 1,$$

gilt nach (5), (6)

$$|y - \eta| \leq e^x - 1.$$

Nach (19) ist

$$\varepsilon = \text{Max} \left(\left| \frac{1}{x} \int_0^x \sin x \, dx \right| \right) = \text{Max} \left(\frac{1 - \cos x}{x} \right) = 0,725$$

also

$$|y - \eta| \leq 0,725 (e^x - 1).$$

Der wahre Fehler errechnet sich zu

$$y - \eta = -\frac{1}{2} e^x + \frac{1}{2} (\sin x + \cos x),$$

so daß der Fehler bei $x=\pi$ sich zu

$$f \leq 22,2; \quad f \leq 16,1; \quad f = 12,1$$

ergibt.

3. Beispiel:

$$y' = y; \quad \eta' = \eta + 1 - x \dots \dots \dots (60)$$

mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1$. Wir betrachten das Intervall $0 \leq x \leq 1$. In diesem Bereich ist $\vartheta = 1 - x$ monoton fallend, das Maximum des Integralmittels also gleich dem Funktionswert für $x=0$, also $\varepsilon = 1$. Da auch $M=1$, gilt nach (18), (19)

$$|y - \eta| \leq e^x - 1.$$

Die einfache Fehlerabschätzung fällt natürlich mit der verschärften zusammen. Demgegenüber ergibt sich der wahre Fehler zu $f=x$, da $y=e^x, \eta=x+e^x$. Also gilt für $x=1$

$$f \leq 1,72; \quad f = 1.$$

§ 6. Ein Beispiel zur Fehlerabschätzung für das Adams'sche Verfahren

Als Beispiel sei wie bei v. Mises und G. Schulz die Differentialgleichung

$$y' = \frac{y-x}{y+x} \dots \dots \dots (61)$$

mit dem Anfangswert $x=0, y=1$ mit $h=0,02, n=4$ gewählt. Für das extrapolative Verfahren seien die Anfangswerte in der dort beschriebenen Art gewonnen, so daß $\delta = 0,5 \cdot 10^{-6}$ gesetzt werden kann. Nach S. p. 52 ergibt sich mit (34) nach $\nu=100$ Schritten die Fehlerschranke

$$|\varepsilon_{100}| < 1990 \cdot 10^{-6}.$$

Nach der Abschätzung (26) erhält man dagegen mit (s. M. p. 90—91)

$$hM = 0,006; \quad M(x-x_4) = \mu hM = 96 \cdot 0,006 = 0,576;$$

$$K_5 = 8840; \quad a_5 = \frac{95}{288} = 0,3299$$

$$|\varepsilon_{100}| \leq 0,5 \cdot 10^{-6} \cdot e^{0,576} + 0,3299 \cdot \frac{8840}{0,006} \cdot 64 \cdot 10^{-12} (e^{0,576} - 1) = 25 \cdot 10^{-6},$$

also eine rund 80mal bessere Schranke.

Die Berechnung der Fehlerschranke für das interpolative Verfahren nach (44) gestaltet sich etwas anders als bei G. Schulz angegeben, wenn man annimmt, daß die Rechnung mit so viel Stellen durchgeführt ist, daß Abrundungsfehler unberücksichtigt bleiben können und daß die Anfangswerte auch mit einem Polynom n -ten Grades ($n=4$) berechnet werden. Zur Berechnung der Anfangswerte hat man nach (51)

$$\begin{aligned}d_1 &= 1,06 \cdot 10^{-8} \\d_2 &= 1,49 \cdot 10^{-8} \\d_3 &= 1,92 \cdot 10^{-8} \\d_4 &= 2,98 \cdot 10^{-8}\end{aligned}$$

Eine einmalige Iteration mit Hilfe der Gleichungen ($S(72)$) ergibt

$$y_4 = 3,02 \cdot 10^{-8}.$$

Nimmt man diesen Wert für ε und die anderen Werte wie in der Arbeit von G. Schulz, so folgt für das interpolative Verfahren nach (44)

$$|\varepsilon_{100}| \leq 3,02 \cdot 10^{-8} \cdot 2,99 + 1,97 \cdot 10^{-8} = 2,06 \cdot 10^{-8}.$$

Die Abschätzung (32) liefert mit denselben Werten wie oben:

$$|\varepsilon_{100}| \leq \frac{64 \cdot 10^{-12}}{120} \cdot 2,84 \cdot \frac{8840}{0,006} (e^{0,6} - 1) = 1,83 \cdot 10^{-6},$$

also eine — wegen des kleinen hM -Wertes — nur geringfügig bessere Fehlerschranke.

Die Frage, wieweit die Fehlerschranken von dem tatsächlichen Fehler abweichen, läßt sich nicht allgemein entscheiden, da es wesentlich davon abhängt, wie stark $\frac{\partial f}{\partial y}$ und $f^{(n+1)}(x, y(x))$ sich im Integrationsbereich ändern.

Eingegangen: 23. 9. 1948.

Beanspruchung der allgemeinen, geschlossenen sowie auch offenen Kegelschale durch Belastung ihrer Spitze¹⁾

Von G. Sonntag in Vohburg (Donau)

Es werden Bedingungsgleichungen zur Ermittlung der Spannungen in einer allgemeinen biegeschlaffen Kegelschale abgeleitet für eine Belastung ihrer Spitze durch Kräfte und Momente.

The conditional equations for the determination of the stresses in general thin cone slabs while loaded on the top with forces and moments are derived.

Les équations conditionnelles pour déterminer les tensions dans des minces coques coniques, en général, étant chargées aux cimes par des forces et des moments sont dérivées.

Выводятся уравнения для определения напряжений в безмоментной конусной оболочке, нагруженной в ее вершине силами и моментами.

I. Ermittlung der Bedingungsgleichungen

§ 1. Die Beziehung zwischen Spannungsfunktion und Spannung

Wir legen auf den Kegelmantel ein Koordinatensystem s, ψ mit seinem Ursprung $s=0$ in die Kegelspitze. Jeder Punkt ist dann festgelegt durch seinen Abstand s von der Kegelspitze und dem Winkel ψ , den der Strahl s mit einer beliebig als $\psi=0$ festgelegten Erzeugenden des in eine Ebene abgewickelten Kegelmantels einschließt. Da der Kegelmantel als frei von äußeren Lasten angenommen wird, und nach Voraussetzung von der dünnen Schale keine Biegespannungen übertragen werden können, muß bekanntlich die Tangentialspannung σ_ψ überall verschwinden.

$$\sigma_\psi = 0 \dots \dots \dots (1).$$

Auf den einfachen Nachweis mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen an einem durch zwei benachbarte Mantellinien und dazu orthogonalen Trajektorien herausgeschnittenen Schalenelement soll hier verzichtet werden.

¹⁾ Für die Anregung und Förderung dieser Arbeit möchte ich meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. phil. L. Föppel und Herrn Prof. Dr. B. Baule meinen verbindlichsten Dank aussprechen.

Wie L. Föppl [1]²⁾ nachgewiesen hat und an Hand der Gleichgewichtsgleichungen leicht nachzuprüfen ist, lassen sich die Längsspannung σ_s und die Schubspannung $\tau_{s\psi}$ durch

$$\sigma_s = \frac{c_1}{\delta s} f_1 + \frac{c_2}{\delta s^2} \frac{\partial f_2}{\partial \psi}; \quad \tau_{s\psi} = \frac{c_2}{\delta s^2} f_2 \quad \dots \quad (2)$$

ausdrücken, worin f_1 und f_2 Funktionen in ψ allein bedeuten. δ bezeichnet die gleichmäßige Wandstärke der dünnen Schale und c_1, c_2 sind Konstanten.

Die Funktion f_1 entspricht der Belastung der Kegelspitze durch eine Kraft, und der reine Längsspannungszustand nimmt proportional mit s ab. Die von der Funktion f_2 bestimmten Spannungen sind umgekehrt proportional dem Quadrat des Abstandes s von der Kegelspitze, die durch ein Moment belastet wird [1]. Die Aufgabe, für eine gegebene Belastung der Kegelspitze die Spannungen zu ermitteln, ist im allgemeinen statisch unbestimmt. Ihre Lösung soll im folgenden aufgezeigt werden.

§ 2. Ermittlung der Spannungsfunktion f_1 für die durch Kräfte an ihrer Spitze belastete Kegelschale

Schneidet man die Kegelschale längs einer Kurve $s = \text{const.}$ auf, so muß die aus den Spannungen resultierende Kraft das Gleichgewicht zur Last \mathfrak{P} herstellen.

Um diese Bedingungen analytisch zu erfassen, denke man sich in die Kegelspitze ein rechtwinkeliges x, y, z -Koordinatensystem gelegt, das zunächst ganz willkürlich gerichtet sei. Bezeichnet man mit $\zeta_x, \zeta_y, \zeta_z$ die von einer Mantellinie des Kegels und der x -, y - und z -Achse eingeschlossenen Winkel, so fordert das Gleichgewicht:

$$\mathfrak{P} = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}$$

$$\text{mit} \quad P_x = s \delta \int_{\psi=0}^{2\alpha} \sigma_s \cdot \cos \zeta_x \cdot d\psi, \quad P_y = s \delta \int_{\psi=0}^{2\alpha} \sigma_s \cdot \cos \zeta_y \cdot d\psi, \quad P_z = s \delta \int_{\psi=0}^{2\alpha} \sigma_s \cdot \cos \zeta_z \cdot d\psi \quad \dots \quad (3).$$

Darin ist 2α der Keilwinkel des in eine Ebene abgewickelten Kegelmantels. Die Winkel ζ_x, ζ_y und ζ_z sind Funktionen von ψ , die nach gewähltem x -, y -, z -Koordinatensystem bei einer gegebenen Kegelschale eindeutig bestimmt sind. Für die weiteren Überlegungen genügt es, die auf die Achsenrichtung entfallenden Komponenten P_x, P_y, P_z der Last \mathfrak{P} für sich zu betrachten, da der Gesamtspannungszustand durch Überlagerung der aus diesen Lastkomponenten sich ergebenden Spannungen erhalten werden kann. Es werde die Untersuchung für den jetzt als Einzelkraft betrachteten Lastenteil P_x fortgesetzt. Ist $\sigma_{s(x)}$ der Anteil der Spannung σ_s , der von der Last P_x hervorgerufen wird, so lautet die Gleichgewichtsbedingung

$$P_x = s \delta \int \sigma_{s(x)} \cdot \cos \zeta_x \cdot d\psi \quad \dots \quad (4a)$$

und, nach Einsetzen von $\sigma_{s(x)}$ nach Gl. (2), wobei $f_2 = 0$ zu setzen ist, folgt

$$P_x = c_1 \int f_1 \cdot \cos \zeta_x d\psi \quad \dots \quad (4b).$$

Die Integration ist hier wie in Zukunft immer über 2α zu erstrecken. Weiterhin darf die aus den Spannungen $\sigma_{s(x)}$ resultierende Kraft keine Komponente senkrecht zur Last P_x aufweisen, was nach Gl. (3) durch die Bedingung

$$\int \sigma_{s(x)} \cdot \cos \zeta_y d\psi = 0, \quad \int \sigma_{s(x)} \cdot \cos \zeta_z d\psi = 0 \quad \dots \quad (5)$$

ausgedrückt wird. Drückt man in Gl. (2) c_1 durch die Gleichgewichtsbedingung (4b) aus, so folgt:

$$\sigma_{s(x)} = -\frac{P_x}{s \delta} \cdot \frac{f_1}{\int f_1 \cos \zeta_x d\psi} \quad \dots \quad (6).$$

Zur Vereinfachung lassen wir in Zukunft den Index an f fortfallen. Von den unendlich vielen Funktionen f und damit verknüpften Spannungszuständen, die die Stetigkeitsbedingung und die Gl. (4) und (5) befriedigen, wird sich derjenige Spannungsverlauf einstellen, bei dem die Formänderungsarbeit zu einem Minimum wird. In den Ausdruck für die auf die Raumeinheit bezogene Formänderungsarbeit [2]

$$A = \frac{\sigma^2}{2E} \quad \dots \quad (7)$$

wird die Längsspannung nach Gl. (6) eingesetzt. Nach Zusammenfassung aller von ψ unabhängigen Größen in den Beiwert c ist die Formänderungsarbeit in einem von den Schnitten

²⁾ Die Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf das Schrifttum am Ende der Arbeit.

$s = \text{const.}$ und $s + ds = \text{const.}$ begrenzten Streifen durch

$$A = c \frac{\int f^2 d\psi}{[\int f \cos \zeta_x d\psi]^2} \dots \dots \dots (8)$$

bestimmt.

Nach den Regeln der Variationsrechnung ändert man die Spannungsfunktion in seinem Verlauf ein wenig ab, indem eine im Intervall von $\psi = 0$ bis $\psi = 2\alpha$ ganz beliebige, aber stetige und endliche mit dem sehr kleinen Faktor ε multiplizierte Funktion $\eta(\psi)$ zu f hinzuaddiert wird.

Bekanntlich muß für die gesuchte Funktion f die partielle Differentiation der variierten Formänderungsarbeit nach ε für $\varepsilon = 0$ verschwinden [3, S. 594], und es folgt nach einfacher Rechnung:

$$\int f \cos \zeta_x d\psi \cdot \int f \cdot \eta \cdot d\psi - \int f^2 d\psi \cdot \int \eta \cos \zeta_x d\psi = 0 \dots \dots \dots (9)$$

Gl. (9) muß für jede beliebige Wahl von η verschwinden; diese Bedingung ist aber nur für

$$f = C \cdot \cos \zeta_x \dots \dots \dots (10)$$

erfüllt.

Gl. (10) in (6) eingesetzt gibt den Spannungsverlauf $\sigma_{s(x)}$ für jede beliebige Kegelschale als Funktion des Winkels ζ_x an, den die Erzeugende der Kegelschale mit der äußeren Last P_x einschließt:

$$\sigma_{s(x)} = -\frac{P_x}{s\delta} \cdot \frac{\cos \zeta_x}{\int \cos^2 \zeta_x d\psi} \dots \dots \dots (11)$$

Die Rechnung wurde unter der zunächst stillschweigend vorausgesetzten Erfüllung der Gl. (5) durchgeführt.

Nach Einsetzen von Gl. (11) in Gl. (5) folgen als weitere Bedingungen die ersten beiden Gleichungen von (12).

$$\int \cos \zeta_x \cos \zeta_y d\psi = 0, \quad \int \cos \zeta_x \cos \zeta_z d\psi = 0, \quad \int \cos \zeta_y \cos \zeta_z d\psi = 0 \dots (12)$$

Die dritte der Gl. (12) wurde der Vollständigkeit halber schon mit angeschrieben. Sie erhellen, daß die Richtung des in die Kegelspitze gelegten rechtwinkligen Koordinatensystems nicht willkürlich gewählt werden darf. Durch eine einfache Betrachtung, die wir uns hier wohl sparen können, läßt sich nachweisen, daß bei Vorhandensein von Symmetrieebenen die gesuchten Koordinatenachsen senkrecht auf diesen stehen müssen, um Gl. (12) zu erfüllen. Da die Lage des Achsenkreuzes durch zwei Richtungen bereits eindeutig bestimmt ist, genügt es immer zwei der Gl. (12) zur Berechnung hinzuzuziehen, die dritte Gleichung ist dann auch erfüllt, wovon man sich zur Kontrolle leicht überzeugen kann.

Danach ist die Last in diese Richtungen in P_x , P_y und P_z zu zerlegen. Die Spannungsanteile $\sigma_{s(x)}$, $\sigma_{s(y)}$, $\sigma_{s(z)}$ werden aus Gl. (11) nach entsprechender Vertauschung der Indices gefunden, wonach sich der endgültige Spannungsverlauf durch Superposition ergibt. Dieser Lösungsgang kann auch ohne Einschränkung auf die offene Kegelschale angewandt werden, da bei einem Schnitt längs einer Erzeugenden keine inneren Kräfte frei werden.



Bild 1
Kegelschale mit eingeschnittener
Öffnung

Besondere Bedeutung kommt dieser Überlegung einer Kegelschale mit einer seitlichen Öffnung im Kegelmantel zu (Bild 1). Da für den betrachteten Belastungsfall in der biegunsschlaffen Schale weder Tangentialspannungen σ_ψ noch Schubspannungen $\sigma_{\psi\psi}$ übertragen werden können, müssen die Erzeugenden des Kegelmantels, die die Öffnung überstreichen, spannungslos sein. Die Schale ist dann als offene Kegelschale, d. h. unter Ausschluß des die Öffnung eingrenzenden Sektors zu berechnen. Zeigt sich dabei, daß die Spannung σ_s , der die Öffnung tangierenden Erzeugenden verschwindet, so ist die Lösung als streng anzusehen. Andernfalls würde sich beim Über-

gang zur ersten Erzeugenden, die die Öffnung überstreichen, eine Unstetigkeit ergeben, die wegen der Formänderungsbedingungen nicht möglich ist. Es werden dann unter Auftreten von Biegung auch in den nach Voraussetzung spannungsfreien Mantellinien Spannungen auftreten, die jedoch rasch abklingen werden.

§ 4. Ermittlung der Spannungsfunktion für eine Kegelschale mit Momentbelastung an der Spitze

Schneiden wir den Kegelmantel in einer Kurve $s = \text{const.}$ auf und legen den Momentenpunkt in die Kegelspitze, so ist das Moment der Längsspannungen gleich null, und das Moment der Schubspannungen muß Gleichgewicht halten mit dem an der Spitze eingeleiteten Moment. Das

Moment der Schubspannungen in bezug auf die x -Achsen eines rechtwinkligen x, y, z -Koordinatensystems, dessen Ursprung in der Kegelspitze liegt, ist:

$$M_x = \delta s^2 \int \tau_{s\psi} \cdot \Phi_x \cdot d\psi \dots \dots \dots (13),$$

worin $s\Phi_x$ den Hebelarm der Kraft $\tau_{s\psi} \cdot \delta s \cdot d\psi$ in bezug auf die x -Achse bedeutet. Die Integration ist hier wie in Zukunft über den Keilwinkel 2α der abgewickelten Kegelschale zu erstrecken. Damit die Spannungen $\tau_{s\psi(x)}, \tau_{s\psi(y)}, \tau_{s\psi(z)}$ des in die x, y, z -Achsen zerlegten Momentenvektors superponiert werden können, muß das Achsenkreuz so gerichtet sein, daß z. B. die Schubspannungen $\tau_{s\psi(x)}$ kein resultierendes Moment in bezug auf die y, z -Achsen aufweisen, woraus folgt:

$$M_x = \delta s^2 \int \tau_{s\psi(x)} \cdot \Phi_x \cdot d\psi, \quad \int \tau_{s\psi(x)} \cdot \Phi_y d\psi = 0, \quad \int \tau_{s\psi(x)} \cdot \Phi_z d\psi = 0 \dots (14).$$

Für M_y und M_z sind die Indices entsprechend zu vertauschen. Die Gl. (2), worin jetzt $f_1 = 0$ zu setzen ist, lauten in Verbindung mit Gl. (14)

$$\sigma_{s(x)} = \frac{M_x}{\delta s^2} \cdot \frac{f'_2}{\int f_2 \cdot \Phi_x d\psi}, \quad \tau_{s\psi(x)} = \frac{M_x}{\delta s^2} \cdot \frac{f_2}{\int f_2 \cdot \Phi_x d\psi} \dots \dots \dots (15),$$

worin Striche an f_2 partielle Differentiation nach ψ bedeuten. Die gleiche Variation der Formänderungsarbeit wie in § 2 führt auf die Gleichung

$$\frac{1}{E} (\int f \Phi \cdot d\psi \int f' \eta' \cdot d\psi - \int f'^2 \cdot d\psi \int \Phi \eta \cdot d\psi) + \frac{1}{G} (\int f \Phi d\psi \int f \eta \cdot d\psi - \int f^2 \cdot d\psi \int \Phi \eta \cdot d\psi) = 0 \quad (16a),$$

wobei auf die Indices an f und Φ verzichtet wurde. η ist die beliebige Variationsfunktion und E, G der Elastizitäts- bzw. Schubmodul. Damit η nicht in seiner Ableitung η' auftritt, integrieren wir partiell:

$$\int f' \eta' \cdot d\psi = [f \eta']_0^{2\alpha} - \int f'' \eta \cdot d\psi \}$$

und außerdem zweckmäßig $\int f'^2 \cdot d\psi = [f' f]_0^{2\alpha} - \int f'' f \cdot d\psi \}$ (17).

Bei einer geschlossenen Kegelschale, d. h. jede Kurve $s = \text{const.}$ läuft in sich zurück, verschwinden die eckigen Klammern in Gl. (17) wegen der Stetigkeitsbedingung, und es folgt für die erste Klammer in Gl. (16a)

$$\frac{1}{E} (- \int f \Phi \cdot d\psi \int f'' \eta \cdot d\psi + \int f'' f \cdot d\psi \int \Phi \eta \cdot d\psi) \dots \dots \dots (16b).$$

Für beliebige zulässige Funktionen η ist Gl. (16) erfüllt, wenn

$$\Phi = C_1 \cdot f = \text{const.} \quad \text{oder} \quad \Phi = C_1 f = C_2 f'' \dots \dots \dots (18)$$

gesetzt wird, wie man sich durch Einsetzen in Gl. (16) sofort überzeugt. $\Phi = C_1 f = \text{const.}$ gilt für die gerade Kreiskegelschale mit in ihrer Symmetrieachse liegendem Momentenvektor. Die Bedingung des zweiten Ansatzes $cf = f''$ ist für $f = \sin \lambda \psi + \cos \lambda \psi$ erfüllt³⁾. Es muß nun die Kegelschale aufgesucht werden, bei der sich der Hebelarm $s\Phi$ der Schubspannung $\tau_{s\psi}$ in bezug auf den Vektor des an der Kegelspitze eingeleiteten Momentes M mit $\cos \lambda \psi$ oder $\sin \lambda \psi$ ändert. Das ist wieder die gerade Kreiskegelschale und zwar mit zu seiner Symmetrieachse senkrechtem Momentenvektor. Es ist anscheinend nur in diesem Falle möglich, zwischen dem Hebelarm der Schubkraft, der bei einer mit ihrer Momentbelastung gegebenen Kegelschale eindeutig bestimmt ist, und der Schubspannung unter Anwendung obiger Variation eine Beziehung abzuleiten. Hierbei muß wegen Gl. (14) eine Achse des Koordinatensystems, in dessen Richtungen ein beliebig gegebener Momentenvektor zu zerlegen ist, mit der Symmetrieachse des Kreiskegels zusammenfallen.

Während bei der Belastung der Kegelspitze durch Kräfte das angewandte Verfahren eine eindeutige strenge Lösung des Spannungszustandes für jede beliebige Kegelschale angibt, führt es bei Momentbelastung nur bei der geraden Kreiskegelschale zum Ziel.

Zur Auffindung des Spannungszustandes bei der allgemeinen Kegelschale mit Momentbelastung ihrer Spitze könnte als Näherungsverfahren für die Schubspannung ein den Randbedingungen genügender Ansatz gemacht werden, etwa in Form einer Fourierreihe, deren Konstanten so zu bestimmen sind, daß die Formänderungsarbeit zum Minimum wird. Dieses Verfahren ist nur zu empfehlen, wenn mit Sicherheit eine gleichmäßige Schubspannungsverteilung über die Schalenstärke zu erwarten ist. Wird z. B. eine auf Torsion beanspruchte Kegelschale längs einer Erzeugenden aufgeschnitten, so bildet sich eine Spannungsverteilung aus, bei der die Schubspannung nicht mehr über die Stärke des Kegelmantels konstant ist, sondern ganz im Gegenteil, sie wechselt sogar ihre Richtung. Dann ist obiges Berechnungsverfahren unbrauchbar und es müssen andere Wege beschritten werden, auf die hier nicht näher eingegangen werden soll.

³⁾ Die Hyperbelfunktion scheidet aus, da für sie keine stetig in sich zurücklaufende Kegelform existiert.

II. Beispiele

§ 4. Die elliptische Kegelschale bei Belastung ihrer Spitze durch Kräfte

Legt man den Koordinatenanfangspunkt eines x - y - z -Koordinatensystems in die Kegelspitze und sorgt ferner wegen Gl. (12) dafür, daß die x - z -Ebene und die y - z -Ebene Symmetrieebenen des Kegels sind, so lautet die Gleichung dieses Kegels (s. Bild 2):

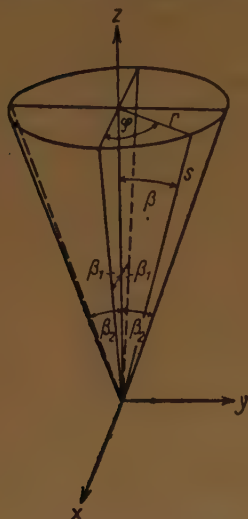
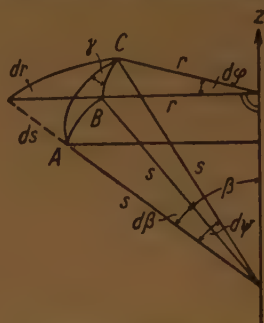


Bild 2. Elliptische Kegelschale

Bild 3. Die geometrische Beziehung zwischen den Winkeln $d\varphi$, $d\psi$ und $d\beta$

$$\frac{x^2}{\operatorname{tg}^2 \beta_1} + \frac{y^2}{\operatorname{tg}^2 \beta_2} = z^2 \quad \dots (19).$$

β_1 und β_2 sind die Winkel, die an der kleinen und großen Halbachse der Ellipse von der Erzeugenden und der z -Achse eingeschlossen werden. Schreibt man Gl. (19) in Zylinderkoordinaten z , r , φ um, und bezeichnet den von einer Erzeugenden des Kegels und der z -Achse eingeschlossenen Winkel mit β , so folgt (Bild 2):

$$\operatorname{tg}^2 \beta = \frac{\operatorname{tg}^2 \beta_2}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi} \quad \dots (20),$$

worin $\varepsilon^2 = \frac{\operatorname{tg}^2 \beta_1 - \operatorname{tg}^2 \beta_2}{\operatorname{tg}^2 \beta_1}$ die numerische Exzentrizität bedeutet. Es

ist oft leichter, den Spannungszustand als Funktion von φ als vom Winkel ψ auszudrücken. Zwischen diesen Winkeln besteht, wie man aus dem rechtwinkligen Dreieck ABC (Bild 3) abliest, bei der allgemeinen Kegelschale die Beziehung:

$$(s \cdot d\beta)^2 + (r \cdot d\varphi)^2 = (s \cdot d\psi)^2 \quad \dots (21).$$

Eine einfache Umformung der Gl. (21) ergibt mit $r = s \cdot \sin \beta$ in Anwendung auf die elliptische Kegelschale nach Gl. (20)

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 \beta_2}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi + \operatorname{tg}^2 \beta_2} + \frac{\operatorname{tg}^2 \beta_2 \varepsilon^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{(1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi + \operatorname{tg}^2 \beta_2)^2 (1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi)}} \quad \dots (22).$$

Betrachtet man zunächst eine Last P_z in Richtung der z -Achse, so wird der von einer Erzeugenden und der Last eingeschlossene Winkel ζ_z identisch mit β . Der Spannungszustand $\sigma_{s(z)}$ ist dann nach Einsetzen von $\cos \zeta_z$ als Funktion von φ durch Gl. (11) eindeutig bestimmt

$$\sigma_{s(z)} = -\frac{P_z}{s\delta} \frac{\cos \zeta_z}{\int_0^{2\pi} \cos^2 \zeta_z \cdot \frac{d\psi}{d\varphi} d\varphi}.$$

Unter Anwendung von Gl. (20) wird $\cos \zeta_z$ durch φ ausgedrückt:

$$\sigma_{s(z)} = -\frac{P_z}{s\delta} \frac{\sqrt{\frac{a}{a + \operatorname{tg}^2 \beta_2}}}{\int_0^{2\pi} \frac{a}{a + \operatorname{tg}^2 \beta_2} \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 \beta_2}{a + \operatorname{tg}^2 \beta_2} + \frac{\operatorname{tg}^2 \beta_2 \varepsilon^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{(a + \operatorname{tg}^2 \beta_2)^2 \cdot a}} d\varphi} \quad \dots (23)$$

mit $a = 1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi$.

Für $\beta_1 = \beta_2$ wird $\varepsilon = 0$, die elliptische Kegelschale geht in eine Kreiskegelschale über vom Öffnungswinkel 2β , und Gl. (23) vereinfacht sich zu

$$\sigma_{s(z)} = -\frac{P_z}{s\delta} \frac{\cos \beta}{\int_0^{2\pi} \cos^2 \beta \sin \beta d\varphi} = -\frac{P_z}{s\delta \pi \sin 2\beta} \quad \dots (24),$$

wie man auch auf einfacherem Wege finden kann.

Denkt man sich weiter eine Last P_x in die x -Achse gelegt, und liest aus Bild 2 die Beziehung $\cos \xi_x = \sin \beta \cos \varphi$ ab, so folgt der Spannungsverlauf aus

$$\sigma_s(x) = - \frac{P_x}{s \delta} \frac{\cos \varphi \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 \beta_2}{a + \operatorname{tg}^2 \beta_2}}}{\int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{\operatorname{tg}^3 \beta_2 \cos^2 \varphi}{(a + \operatorname{tg}^2 \beta_2)^{3/2}} \sqrt{1 + \frac{\varepsilon^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{(a + \operatorname{tg}^2 \beta_2) a}} d\varphi} \quad (25).$$

Für die Kreis Kegelschale vereinfacht sich Gl. (25) zu

$$\sigma_s(x) = - \frac{P_x}{s \delta} \frac{\sin^3 \beta \cos \varphi}{\int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin^3 \beta \cos^2 \varphi d\varphi} = - \frac{P_x}{s \delta \pi} \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \beta} \quad (26),$$

wie auch schon bekannt ist. Es ist überflüssig, den Spannungsverlauf für eine Last in Richtung der anderen Halbachse der Ellipse auch noch anzuschreiben, da man ihn aus Gl. (25) durch Vertauschen von β_1 mit β_2 leicht findet.

Es darf dabei nicht übersehen werden, daß sich damit auch ε ändert. Bild 4 zeigt für eine elliptische Kegelschale vom Achsenverhältnis 2:1 und den Winkeln $\operatorname{tg} \beta_1 = 0,5$; $\operatorname{tg} \beta_2 = 1,0$ den Spannungsverlauf σ_s für die Last P_x , P_y und P_z in dimensionsloser Darstellung. Aus Symmetriegründen genügt es, die Spannung nur über $1/4$ der Abwicklung der Schale vom Keilwinkel 2α , entsprechend den Winkeln $\varphi = 0$ bis $\varphi = \frac{\pi}{2}$ anzugeben, und zwar als Funktion von ψ , da die Darstellung σ_s als Funktion von φ bei großer Exzentrizität ε ein zu verzerrtes Bild gibt. Der Spannungsverlauf σ_s längs eines Schnittes $s = \text{const.}$ war in dieser Weise zu erwarten und bietet keine Überraschungen.

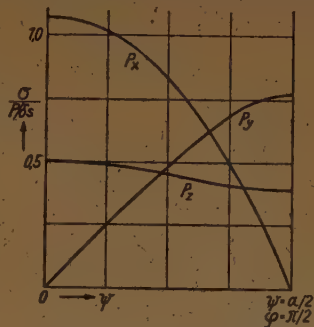


Bild 4. Spannungsverlauf für ein Viertel der Abwicklung einer elliptischen Kegelschale nach Bild 2 vom Achsenverhältnis 2:1 und den Kegelnwinkeln $\operatorname{tg} \beta_1 = 0,5$, $\operatorname{tg} \beta_2 = 1,0$ unter den Lasten P_x , P_y und P_z .

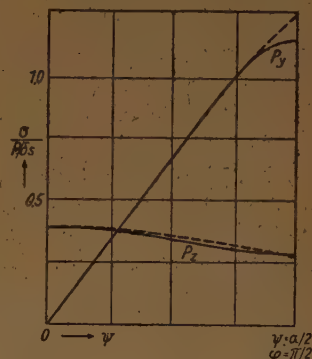


Bild 5. Spannungsverlauf für ein Viertel der Abwicklung einer elliptischen Kegelschale nach Bild 2 vom Achsenverhältnis 10:1 und den Kegelnwinkeln $\operatorname{tg} \beta_1 = 0,1$, $\operatorname{tg} \beta_2 = 1,0$ unter den Lasten P_y und P_z . Die Spannungen für einen Keil vom Winkel $\beta_1 = 0$, $\operatorname{tg} \beta_2 = 1,0$, entsprechend einer unendlich flachen Ellipse, wurden gestrichelt hinzugefügt.

Behält man den Öffnungswinkel $\beta_2 = 45^\circ$ an der großen Halbachse bei, so daß $\operatorname{tg} \beta_2 = 1,0$ und verkleinert β_1 zu $\operatorname{tg} \beta_1 = 0,1$, so erhält man eine flache Kegelschale vom Achsenverhältnis 10:1. Für eine Last P_x parallel zur großen Halbachse und P_z in Richtung der Mittellinie der Kegelschale folgt ein Spannungsverlauf σ_s nach Bild 5. Mit weiter zunehmender Verflachung der Kegelschale wird endlich $\beta_1 = 0$ und der Spannungsverlauf geht in denjenigen eines Keiles [4, S. 7] vom Keilwinkel $2\beta_2 = \frac{\pi}{2}$ über, wie in Bild 5 gestrichelt angegeben wurde. Wie sich leicht nachweisen läßt, kann die auf anderem Wege bereits gefundene Spannungsverteilung in der unendlichen Halbebene und im Keil [5, S. 294ff.] auch unter Anwendung von Gl. (11) als Grenzfall einer flachen elliptischen Kegelschale abgeleitet werden.

§ 5. Die offene Kegelschale bei Belastung ihrer Spitze durch Kräfte

In diesem Beispiel soll die Anwendung der Gl. (11) und (12) auf eine offene Kegelschale gezeigt werden. Um das Wesentliche herauszuschälen wird, der einfache Fall einer halben geraden Kreis Kegelschale nach Bild 6 behandelt. Die Spannungsverteilung läßt sich für jeden beliebigen Kraftangriff in der Kegelspitze nach dem in Abschnitt I, § 2 Gesagten sofort eindeutig unter Anwendung von Gl. (11) lösen, wenn die Lage des Achsendreikantes bekannt ist. Die Richtung der x -Achse findet man in diesem einfachen Beispiel sofort als senkrecht zur Symmetrieebene. Zur Bestim-

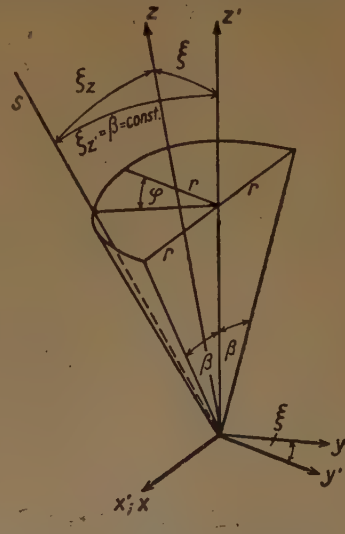


Bild 6
Gerade Kreis Kegelschale als offene Schale

mung der Richtung der y - und z -Achse liest man unter Anwendung des Cosinussatzes für Kugeldreiecke aus Bild 6 ab:

$$\begin{aligned}\cos \zeta_s &= \cos \beta \cos \xi + \sin \beta \sin \xi \cos \varphi \\ \cos \zeta_y &= \cos \beta \sin \xi - \sin \beta \cos \xi \cos \varphi,\end{aligned}$$

womit nach Gl. (12) mit $d\psi = \frac{r}{s} d\varphi$ folgt:

$$\int_{\varphi = -\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos y \cos z \cdot \frac{r}{s} d\varphi = 0 = -\sin 2\beta \cos 2\xi + \pi \cos^2 \beta \sin 2\xi - \frac{\pi}{2} \sin^2 \beta \sin 2\xi$$

und damit $\operatorname{ctg} 2\xi = \frac{\pi}{2} \operatorname{ctg} \beta - \frac{\pi}{4} \operatorname{tg} \beta \dots \dots \dots (27).$

Für $\beta = 45^\circ$ folgt aus Gl. (27) $\xi = 26^\circ$.

Mit der eindeutigen Bestimmung der Lage des Achsenkreuzes hat man nun die Richtungen gefunden, in die die an der Kegelspitze angreifende Last zu zerlegen ist, um den Spannungsverlauf nach Gl. (11) berechnen zu können, worauf hier verzichtet werden soll, um Wiederholungen zu vermeiden.

§ 6. Die gerade Kreiskegelschale mit Momentbelastung ihrer Spitze

Bei der geraden Kreiskegelschale vom Kegelwinkel $2\beta = \text{const.}$ sind aus Symmetriegründen nur zwei Belastungsfälle zu unterscheiden. Im ersten Fall liegt der Momentenvektor in der Symmetrieachse, im zweiten Fall steht er senkrecht zu ihr und geht nach Voraussetzung durch die Kegelspitze. Greift das Moment für einen gegebenen Belastungsfall in anderer Weise an der Spitze an, so ist es in obige zwei Richtungen zu zerlegen und die Spannungen sind in bekannter Weise zu superponieren. Liegt der Momentenvektor in der Symmetrieachse des Kegels, so kann man die Spannungen sofort anschreiben:

$$\tau_{s\psi} = \frac{c_2}{\delta s^2} f_2 = \frac{-M}{s^2 \delta \cdot 2\pi \sin^2 \beta}; \quad \sigma_s = \frac{c_2}{\delta s^2} f'_2 = 0 \dots \dots \dots (28).$$

Steht der Momentenvektor senkrecht auf der Symmetrieachse des Kreiskegels, so ist der Spannungszustand nach § 3 Gl. (18) durch den Ansatz $f_2 = c_1 \cos \lambda \psi = \Phi$ eindeutig bestimmt. Betrachtet man Bild 2, worin entsprechend einem geraden Kreiskegel $\beta_1 = \beta_2$ zu setzen ist, und liegt der Momentenvektor in der x -Achse, so ist das Moment der Schubspannung in bezug auf diese Achse

$$dM = \tau_{s\psi} \cdot \delta \cos \varphi s \cos \beta \cdot s d\psi \quad \text{mit} \quad \cos \beta \cos \varphi = \Phi.$$

Da $\beta = \text{const.}$ ist, gilt $\varphi = \frac{s}{r} \psi = \frac{\pi}{\alpha} \psi$ und es folgen mit $f_2 = \Phi_x = \cos \beta \cos \frac{\pi}{\alpha} \psi$ die Spannungen

$$\tau_{s\psi} = -\frac{M}{s^2 \delta \pi} \frac{2 \cos \frac{\pi}{\alpha} \psi}{\sin 2\beta}; \quad \sigma_s = -\frac{M}{s^2 \delta \pi} \frac{2 \sin \frac{\pi}{\alpha} \psi}{\sin 2\beta \sin \beta} \dots \dots \dots (29).$$

§ 7. Die elliptische Kegelschale mit Momentbelastung ihrer Spitze

Es soll in diesem Beispiel das in § 3 angegebene Näherungsverfahren angewandt werden. Eine elliptische Kegelschale nach Bild 2 wird durch ein Torsionsmoment belastet und zwar liegt der Momentenvektor in der z -Achse. Der einfache Ansatz

$$\left. \begin{aligned} \tau_{s\psi} &= \frac{1}{\delta s^2} \left(b_0 + b_1 \cos \frac{\pi}{\alpha} 2\psi \right) \\ \sigma_s &= \frac{\partial \tau_{s\psi}}{\partial \psi} = -\frac{1}{\delta s^2} b_1 \cdot 2 \frac{\pi}{\alpha} \sin \frac{\pi}{\alpha} 2\psi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (30)$$

mit $\psi=0$ an der kleinen Achse der Ellipse genügt allen Randbedingungen und er wird für eine elliptische Kegelschale mit nicht zu großer Excentrizität eine befriedigende Näherungslösung liefern, anderenfalls ist die Hinzunahme weiterer Glieder der Reihe erforderlich. Die hier durchgeführte Rechnung bezieht sich auf den einfachen Fall einer elliptischen Kegelschale die nicht zu sehr von einer geraden Kreiskegelschale abweicht, etwa bis zu einem Achsenverhältnis 2:1.

Das Gleichgewicht verlangt: $\int_{\psi=0}^{2\alpha} \tau_{s\psi} \cdot \Phi_z s^2 \cdot \delta d\psi = -M$, und es folgt in Anwendung auf Gl. (30) mit $c_0 = b_1/b_0$.

$$\tau_{s\psi} = \frac{-M}{s^2 \delta} \frac{1 + c_0 \cos \frac{\pi}{\alpha} 2\psi}{\int_{\psi=0}^{2\alpha} \left(1 + c_0 \cos \frac{\pi}{\alpha} 2\psi\right) \Phi_z d\psi}; \quad \sigma_s = \frac{M}{s^2 \delta} \frac{c_0 2 \frac{\pi}{\alpha} \sin \frac{\pi}{\alpha} 2\psi}{\int_{\psi=0}^{2\alpha} \left(1 + c_0 \cos \frac{\pi}{\alpha} 2\psi\right) \Phi_z d\psi} \quad (31).$$

c_0 ist in üblicher Weise aus der Minimalbedingung der Formänderungsarbeit zu bestimmen.

Wird zur Vereinfachung die Poissonsche Konstante $\nu = \frac{1}{m} = 0$ gesetzt, womit also die Querdehnung vernachlässigt wird, so ist $E = 2G$, und die einfache Differentiation der Formänderungsarbeit nach der Konstanten c_0 ergibt nach einigen Umformungen

$$c_0 = \frac{\int_{\psi=0}^{2\alpha} \cos \frac{\pi}{\alpha} 2\psi \cdot \Phi_z d\psi}{\int_{\psi=0}^{2\alpha} \Phi_z d\psi} \cdot \frac{1}{\frac{\pi^2}{\alpha^2} + 0,5} \quad (32).$$

Bei der geraden Kreiskegelschale ist $\Phi_z = \text{const.}$, damit wird das Integral $\int_{\psi=0}^{2\alpha} \cos \frac{\pi}{\alpha} 2\psi \cdot \Phi_z d\psi$ gleich null, und c_0 verschwindet, wie zu erwarten war. Das Moment der Schubspannung $\tau_{s\psi}$ in bezug auf die z -Achse liest man aus Bild 3 ab:

$$dM = \tau_{s\psi} \delta \cos \gamma \sin \beta s^2 d\psi, \quad \text{wobei} \quad \cos \gamma \sin \beta = \Phi_z = \sin^2 \beta \frac{d\varphi}{d\psi}.$$

Für eine elliptische Kegelschale vom Achsenverhältnis 2:1 und den Kegelwinkeln $\text{tg } \beta_1 = 0,5$; $\text{tg } \beta_2 = 1,0$ ergibt die Ausrechnung der Gl. (32) $c_0 = 0,12$, und es zeigt sich nach Gl. (31), daß die maximale Schubspannung $\tau_{s\psi}$ an der kleinen Halbachse der Ellipse auftritt, und zwar ist sie bei unserem Beispiel um 27% größer als an der großen Halbachse. Die große Beanspruchung nach Maßgabe der Hauptschubspannung $\tau_H = \sqrt{\sigma_s^2/4 + \tau_{s\psi}^2}$ findet man an einem der Punkte, für die $d\tau_H/d\psi$ verschwindet

$$\frac{d\tau_H}{d\psi} = \frac{b_0 4 \lambda c_0 [\lambda^2 c_0 \sin \lambda 2\psi \cdot \cos \lambda 2\psi - (1 + c_0 \cos \lambda 2\psi) \sin \lambda 2\psi]}{2 \delta s^2 \sqrt{\sigma_s^2/4 + \tau_{s\psi}^2}} \quad \text{mit} \quad \lambda = \frac{\pi}{\alpha}.$$

Es folgt

$$\sin \lambda 2\psi [c_0(\lambda^2 - 1) \cos \lambda 2\psi - 1] = 0 \quad (33).$$

Welche Werte der Auflösung der Gl. (33) ein Maximum liefern, findet man leicht durch Einsetzen in τ_H .

Eine maximale Beanspruchung liegt für $c_0 \left[\left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^2 - 1 \right] \leq 1$ an der kleinen Achse, $\psi = 0$ und α vor; ist der Wert ≥ 1 , so findet man den Ort von $\tau_{H \max}$ aus $\cos \frac{2\pi}{\alpha} \psi = 1/c_0 \left[\left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^2 - 1 \right]$.

III. Zusammenfassung

Bei der allgemeinen Kegelschale mit Belastung ihrer Spitze durch Kräfte treten nur Längsspannungen auf, die in verhältnismäßig einfacher Weise eindeutig bestimmt werden können. Das Rechnungsverfahren kann ohne Einschränkung auf eine offene Kegelschale, d. h. bei der keine in sich zurücklaufende Schnittkurve $s = \text{const.}$ existiert, übertragen werden. Besondere Bedeutung kommt dieser Erkenntnis in Anwendung auf eine Kegelschale mit eingeschnittener Öffnung zu, da die die Öffnung überstreichende Mantelstrahlen im allgemeinen näherungsweise als spannungsfrei angesehen werden können.

Bei Momentbelastung der Kegelspitze sind die Verhältnisse viel komplizierter. Eine eindeutige Lösung in geschlossener Form war nur bei der geraden Kreiskegelschale möglich. Für anders gestaltete Kegelschalen wird ein in vielen Fällen befriedigendes Näherungsverfahren angegeben. Verschiedene Beispiele zeigen die Anwendung der Lösungsverfahren.

IV. Schrifttum

- [1] L. F ö p p l: Die schiefe Kreiskegelschale bei zwei Beanspruchungsarten. Z. angew. Math. Mech. (Prandtl-Festschrift).
- [2] A. F ö p p l: Vorlesungen über technische Mechanik. Bd. 3. München und Berlin: R. Oldenbourg 1932.
- [3] H o r t - T h o m a: Die Differentialgleichungen der Technik und Physik. 3. Auflage. Leipzig: A. Barth 1939.
- [4] L. F ö p p l: Aufgaben aus technischer Mechanik. Oberstufe. München-Berlin: R. Oldenbourg 1932.
- [5] A. und L. F ö p p l: Drang und Zwang, eine höhere Festigkeitslehre für Ingenieure. Bd. 1. 3. Auflage. München-Berlin: R. Oldenbourg 1941.

KLEINE MITTEILUNGEN

Der Schlupffehler des Reibradintegrators.

Bei einem für das Max-Planck-Institut für Physik gebauten Reibradintegrator untersuchte der Verfasser eine Erscheinung, die zwar auf einem einfachen physikalischen Zusammenhang beruht, aber wenig bekannt ist. Die Rolle der in Bild 1 gezeigten Anordnung bestand aus zähhartem Stahl, die Scheibe

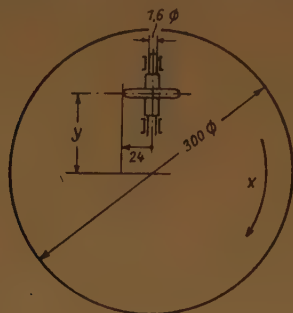


Bild 1

aus einem gewöhnlichen Maschinenbaustahl. Der Rand der Rolle war mit einem Radius von 0,5 mm abgerundet und poliert, die Scheibe geschliffen und poliert; beide waren leicht gefettet. Die zylindrischen Lagerzapfen der Rolle waren poliert und liefen in Bronzebuchsen. Von der Rolle wurde ein wenig Kraft verbrauchendes Zählwerk mit schleichen- den Ziffernscheiben angetrieben. Der Anpreßdruck der Rolle war ca. 400 000 dyn.

Beim Betrieb des fraglichen Gerätes zeigten sich unerwartet hohe Fehler, z. B. beim Planimetrieren eines rechtwinkligen Dreiecks mit achsparallelen Katheten. Wenn in einem solchen Fall die Rolle zur Verfolgung der Hypothenuse radial um $7,89 \text{ cm} = y_2 - y_1$ unter gleichzeitiger Drehung der Scheibe um $10,46 \text{ rad} = x_2 - x_1$ verschoben wird, während die beiden Katheten durch Verschieben des Rollensupports bei ruhender Scheibe bzw. durch Drehen der Scheibe bei ruhendem Rollensupport gebildet werden, so beobachtet man an Stelle der Rollendrehung

$$\frac{(y_2 - y_1)(x_2 - x_1)}{2r} = 13,2 \text{ rad}$$

einen um etwa $0,38 \text{ rad}$ — beinahe 3%! — zu kleinen Wert. Der Fehler ist gut reproduzierbar und ziemlich unabhängig davon, an welcher Stelle der Scheibe der Versuch ausgeführt wird. Er verschwindet völlig, wenn gleichzeitiges Verschieben des Rollensupports und Drehen der Reibscheibe vermieden werden, die

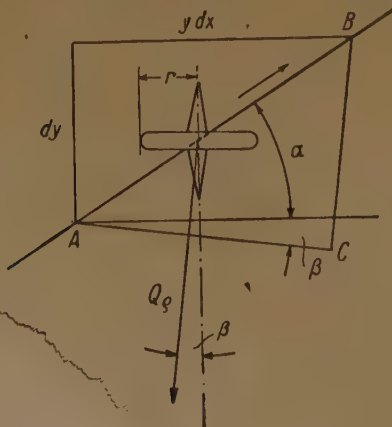


Bild 2

Hypothenuse also durch eine Treppelinie ersetzt wird.

Zur physikalischen Erklärung dieses Verhaltens ist in Bild 2 ein Linienelement AB der vom Berührungspunkt der Rolle auf der Scheibe während der Verfolgung der Hypothenuse beschriebenen Spirale dargestellt. Am Berührungspunkt der Rolle wird die sich aus dem Anpreßdruck Q und dem Reibungskoeffizienten ϱ ergebende Reibungskraft $Q\varrho$ von der Scheibe auf die Rolle übertragen. Wegen des zur Drehung der Rolle unter Mitnahme von Zählwerken usw. nötigen endlichen Momentes M muß diese Reibungskraft eine tangentielle Komponente M/r haben, wo r der Rollradius ist. Daher weicht die obige Reibungskraft um einen kleinen Winkel

$$\beta \approx \frac{M}{rQ\varrho}$$

in der gezeichneten Richtung vom Radius des Berührungspunktes ab. In dieser Richtung tritt zwischen Rolle und Scheibe reines Gleiten ein, und zwar bezogen auf das betrachtete Differential um die Länge der zu $Q\varrho$ parallelen Seite CB des Dreiecks ABC . In der Wegkomponente AC dagegen sind Rolle und Scheibe wie durch eine Schrägverzahnung verbunden zu denken, wodurch der Rolle die infinitesimale Drehung

$$dz = \frac{AC}{r \cdot \cos \beta} = \frac{1}{r} \sqrt{dy^2 + (y dx)^2} (\cos \alpha - \sin \alpha \tan \beta)$$

erteilt wird. Mit $\cos \alpha = y dx / \sqrt{dy^2 + (y dx)^2}$ und $\sin \alpha = dy / \sqrt{dy^2 + (y dx)^2}$ folgt

$$dz = \frac{1}{r} (y dx - dy \tan \beta).$$

Das erste Glied in der Klammer liefert das zu messende Integral, das zweite gibt nach Integration innerhalb der Grenzen y_1 und y_2 den Fehler

$$\delta = (y_2 - y_1) \frac{M}{r^2 Q \varrho}.$$

Löst man diese Beziehung mit den im Zahlenbeispiel schon gemachten Angaben sowie mit der Annahme $\varrho = 0,1$ nach M auf, so erhält man den für das betrachtete Gerät sehr plausiblen Wert $M = 11\,020 \text{ dyn cm}$. Zu beachten ist, daß der Drehwinkel α der Scheibe im Ausdruck für den absoluten Fehler nicht vorkommt. Der relative Fehler der Integration kann also durch Vergrößerung von α gesenkt werden. Durch Planimetrieren eines aus der Diagonalen und zwei Seiten der Schreibfläche bestehenden Dreiecks kann der Reibradintegrator auf seinen Schlupffehler geprüft werden.

Göttingen.

K. Beyerle.

Zur Praxis der numerischen Quadratur.

Die Korrekturglieder für die Mittelwertformeln der numerischen Quadratur eignen sich meist wenig dafür, beim praktischen Rechnen den Fehler des Ergebnisses zu bestimmen. Ihren deutlichen Ausdruck findet diese Tatsache in den Beispielen der Lehrbücher, deren Genauigkeit durch Vergleich mit dem bekannten Wert festgestellt wird. Diese Schwierigkeit läßt sich nun dadurch umgehen, daß man Einschließungsformeln benutzt. Aus der großen Fülle der bekannten Quadraturformeln findet man die hierfür geeigneten leicht durch Beachtung der Vorzeichen und Koeffizienten der Korrekturglieder. Für die Fehlerbestimmung bei Anwendung der Quadraturformeln mit Differenzen hat Charlier [1] eine Regel aufgestellt.

I. Mit den Abkürzungen

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

und

$$y_v = f(a + v[b - a])$$

lautet die Simpsonsche Formel

$$I = \frac{b-a}{6} \{y_0 + y_1 + 4y_{1/2}\} - \frac{1}{2880} (b-a)^5 f^{(4)}(\xi).$$

Als Ergänzungssformel eignet sich [2]

$$I = \frac{b-a}{8} \{3[y_{1/6} + y_{5/6}] + 2y_{1/2}\} + \frac{7}{51840} (b-a)^5 f^{(4)}(\eta).$$

Als Beispiel soll

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2$$

berechnet werden. Mit den Ordinaten

$$\begin{aligned} y_0 &= 1,0000 & y_{1/6} &= 0,8572 \\ y_{1/2} &= 0,6667 & y_{1/2} &= 0,6667 \\ y_1 &= 0,5000 & y_{5/6} &= 0,5454 \end{aligned}$$

erhalten wir

$$0,6945 > \ln 2 > 0,6926$$

und da ihre Fehlerbeträge sich annähernd wie 3 : 1 verhalten, ist auf drei Dezimalstellen genau $\ln 2 = 0,693$.

II. Nach Turazza-Peano [3] ist

$$I = \frac{b-a}{12} \{y_0 + y_1 + 5[y_\alpha + y_\beta]\} - \frac{1}{300} \frac{(b-a)^7}{7!} f^{(6)}(\xi),$$

wo

$$\begin{aligned} \alpha &= 0,27639\ 32023, \\ \beta &= 0,72360\ 67977. \end{aligned}$$

Als Ergänzungssformel eignet sich die Gauss'sche

$$I = \frac{b-a}{18} \{5[y_\gamma + y_\delta] + 8y_{1/2}\} + \frac{1}{400} \frac{(b-a)^7}{7!} f^{(6)}(\eta),$$

wo

$$\begin{aligned} \gamma &= 0,11270\ 16654, \\ \delta &= 0,88729\ 83346. \end{aligned}$$

Als Beispiel sei wieder $\ln 2$ berechnet. Mit den Ordinaten

$$\begin{aligned} y_0 &= 1,000000 & y_{1/2} &= 0,666667 \\ y_1 &= 0,500000 & y_\gamma &= 0,898713 \\ y_\alpha &= 0,783458 & y_\delta &= 0,529858 \\ y_\beta &= 0,580179 & & \end{aligned}$$

erhalten wir

$$0,693182 > \ln 2 > 0,693122$$

und da sich ihre Fehler verhalten wie 4 : 3, ist auf fünf Dezimalstellen genau $\ln 2 = 0,69315$.

III. Die nächsthöhere Turazza-Peano-Formel lautet

$$I = \frac{b-a}{180} \{9[y_0 + y_1] + 64y_{1/2} + 49[y_\alpha + y_\beta]\} - \frac{1}{3920} \frac{(b-a)^9}{9!} f^{(8)}(\xi),$$

wo

$$\begin{aligned} \alpha &= 0,17267\ 31647, \\ \beta &= 0,82732\ 68353. \end{aligned}$$

Als Ergänzungssformel eignet sich wieder eine Gauss'sche:

$$I = (b-a) \{A[y_\kappa + y_\lambda] + B[y_\mu + y_\nu]\} + \frac{1}{4900} \frac{(b-a)^9}{9!} f^{(8)}(\eta),$$

wo

$$\begin{aligned} A &= 0,17392\ 74226, & B &= 0,32607\ 25774, \\ \kappa &= 0,06943\ 18442, & \mu &= 0,33000\ 94782, \\ \lambda &= 0,93056\ 81558, & \nu &= 0,66999\ 05218. \end{aligned}$$

Als Beispiel soll

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{6}$$

berechnet werden. Mit den Ordinaten

$$\begin{aligned} y_0 &= 1,00000\ 000 & y_\kappa &= 1,00060\ 314 \\ y_1 &= 1,15470\ 054 & y_\lambda &= 1,12973\ 745 \\ y_{1/2} &= 1,03279\ 556 & & \\ y_\alpha &= 1,00374\ 797 & y_\mu &= 1,01389\ 773 \\ y_\beta &= 1,09838\ 222 & y_\nu &= 1,06132\ 347 \end{aligned}$$

erhalten wir

$$0,52359\ 889 > \frac{\pi}{6} > 0,52359\ 869$$

und da sich ihre Fehler fast wie 5 : 4 verhalten, ist auf 7 Stellen genau

$$\frac{\pi}{6} = 0,52359\ 88.$$

Diese Einschließungsformeln werden für die meisten praktischen Bedürfnisse genügen. Höhere Genauigkeit läßt sich stets durch Intervallteilung erreichen. Dennoch verdient die Frage gestellt zu werden, ob es nicht möglich ist, den Formelfehler ohne Berechnung neuer Ordinaten zu finden und die durch die irrationalen Abszissen oft notwendigen Tafelinterpolationen zu sparen. Solche Formeln sollen jetzt für 5 und 11 Ordinaten angegeben werden.

IV. Bilden wir vier äquidistante Teilintervalle, so ergibt die doppelte Anwendung der Simpsonschen Formel einen Fehler, der von 4. Ordnung klein ist. Dagegen hat die Cotes'sche Formel für 5 Ordinaten einen Fehler, der von 6. Ordnung klein ist. Hieraus folgt, daß wir mit ausreichender Genauigkeit den Fehler der Simpsonschen Formel durch ihre Differenz mit der Cotes'schen bestimmen können. So entsteht mit der Abkürzung

$$y_i = f\left(a + i \frac{b-a}{4}\right)$$

das folgende Formelpaar

$$\begin{aligned} I &= \frac{b-a}{12} \{[y_0 + y_4] + 4[y_1 + y_3] + 2y_2\} - K, \\ K &= \frac{b-a}{180} \{[y_0 + y_4] - 4[y_1 + y_3] + 6y_2\}. \end{aligned}$$

Das Korrekturglied K dient zur Abrundung der letzten Stelle [4].

Als Beispiel soll

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \frac{\pi^2}{12}$$

berechnet werden. Mit den Ordinaten

$$\begin{aligned} y_0 &= 1,00000 & y_3 &= 0,74616 \\ y_1 &= 0,89260 & y_4 &= 0,69315 \\ y_2 &= 0,81094 & & \end{aligned}$$

erhalten wir $I = 0,82251 - 0,00002$, d. h. es ist auf vier Stellen genau

$$\frac{\pi^2}{12} = 0,8225.$$

V. Die numerische Quadratur mit 10 Teilintervallen $\omega = b - a/10$ ist besonders wichtig, da sich diese am besten der Dezimalteilung der Funktionstafeln anpaßt und Interpolationen spart. Mit der Abkürzung

$$y_i = f(a + i\omega)$$

lautet die Cotes'sche Formel für 5 Teilintervalle [5]

$$\begin{aligned} & \int_a^{a+5\omega} f(x) dx \\ &= \frac{5\omega}{288} \{19y_0 + 75y_1 + 50y_2 + 50y_3 + 75y_4 + 19y_5\} \\ & \quad - \frac{55}{12096} \omega^3 \{y_5^{(5)} - y_0^{(5)}\} \end{aligned}$$

und hiermit folgt

$$\begin{aligned} I = \frac{b-a}{576} \{ & 19[y_0 + y_{10}] + 75[y_1 + y_4 + y_6 + y_9] \\ & + 50[y_2 + y_3 + y_7 + y_8] + 38y_5 \} \\ & - \frac{55}{12096} \left(\frac{b-a}{10}\right)^3 \{y_{10}^{(5)} - y_0^{(5)}\}. \end{aligned}$$

Andererseits ist nach Sheppard [6]

$$\begin{aligned} I = \frac{b-a}{252} \{ & 8[y_0 + y_{10}] + 35[y_1 + y_3 + y_7 + y_9] \\ & + 15[y_2 + y_4 + y_6 + y_8] + 36y_5 \} \\ & - \frac{5}{1512} \left(\frac{b-a}{10}\right)^3 \{y_{10}^{(5)} - y_0^{(5)}\}. \end{aligned}$$

Setzen wir in leichtverständlicher Abkürzung

$$I = C - E_C = S - E_S,$$

so ist

$$E_C - E_S = C - S$$

und wegen

$$E_C : E_S = 45 : 33$$

finden wir

$$E_S = \frac{33}{12} (C - S).$$

Diese Fehlerformel dient wieder zur Abrundung der letzten Stelle.

Da von den Korrekturformeln nur das erste Glied berücksichtigt wurde, ist die Gültigkeit dieser und der unter IV angegebenen Fehlerbestimmung davon abhängig, daß $b-a$ hinreichend klein ist; diese Forderung kann aber durch Teilung des Integrationsintervalls stets leicht erreicht werden.

Als Beispiel soll

$$\int_{100000}^{200000} \frac{dx}{\ln x} = 10^5 \int_1^2 \frac{du}{5 \ln 10 + \ln u}$$

berechnet werden. (Auf dieses Integral hat bereits Gausss seine Methode angewandt.) Mit den Ordinaten

$$\begin{array}{ll} y_0 = 8685,88964 & y_6 = 8345,20502 \\ y_1 = 8614,57357 & y_7 = 8303,19708 \\ y_2 = 8550,48207 & y_8 = 8263,97644 \\ y_3 = 8492,36004 & y_9 = 8227,21640 \\ y_4 = 8439,24751 & y_{10} = 8192,64336 \\ y_5 = 8390,39461 & \end{array}$$

erhalten wir

$$C = 8406,24321 \quad S = 8406,24319$$

$$E_S = 5 \cdot 10^{-5}.$$

Daher ist bis zur letzten Stelle genau $I = 8406,2431$.

Entsprechende Quadraturformeln für empirisch gegebene Ordinaten sollen in einer folgenden Mitteilung behandelt werden.

Schrifttum

- [1] Charlier: Mechanik des Himmels (Leipzig 1907), Bd. II, S. 63. Den Beweis ihrer Richtigkeit lieferte erst C. R. Adams, Rend. Circ. Math. Palermo, 47 (1923), p. 53—61 und 48 (1924), p. 28.
- [2] Man vergleiche diese einfache Ergänzungsformel mit der von G. Kowalewski (Interpolation u. genäherte Quadratur, 1932, S. 84) vorgeschlagenen, wo auch Werte der ersten Ableitung des Integranden benutzt werden. Von unserem Beispiel erhält K. selbst bei Zweiteilung des Intervalls damit nur zwei richtige Dezimalstellen!
- [3] Turazza, Mem. Ist. Veneto 5 (1855), p. 255 bis 298. — Peano, Atti di Torino 27 (1891/92), p. 608—612. (Peano hat die zugehörigen Polynome abgeleitet.)
- [4] Mit dem Rechenaufwand, den die von v. Sanden (Praktische Analysis) empfohlene rohe Fehlerbestimmung der Simpsonschen Formel verursacht, läßt sich auf diese Weise eine weit bessere Genauigkeit erreichen.
- [5] Dieses Restglied wurde angegeben von A. Klingst, Ber. Akad. Wien, Abt. I, Bd. 150 (1941), S. 221 bis 256.
- [6] Diese Formel findet sich in anderer Schreibweise und ohne Restglied zuerst bei Sheppard Proc. Lond. Math. Soc. 32 (1900), p. 258—277. — Shovelton, nach dem Whittaker und Robinson (Calculus of Observations) diese Formel benennen, hat sie erst 1914 in der gleichen Zeitschrift (ohne Restglied) abgeleitet.

Göttingen.

F. K. Rabbert.

Der mittlere Fehler bei der Mittelwertbildung aus Wertgruppen.

In der Fehlerausgleichsrechnung gilt für die Berechnung des Mittelwertes x von n Meßergebnissen x_i mit den jeweiligen Gewichten p_i die Gleichung

$$x = \frac{[p_i x_i]}{[p_i]} \quad (1)$$

und für die Berechnung seines m. F. (mittleren Fehlers) M die Gleichung

$$M = \sqrt{\frac{[p_i v_i^2]}{(n-1)[p_i]}}, \quad (2)$$

worin [...] die in der Ausgleichsrechnung übliche Schreibweise für das Summenzeichen $\Sigma \dots$ darstellt und $v_i = x - x_i$ die Verbesserung des Meßergebnisses x_i bedeutet. Diese Gleichungen und ebenso die folgenden Betrachtungen gelten auch in der Statistik für das arithmetische Mittel einer Reihe von Kollektivgegenständen und seine Streuung.

Bei der Anwendung der obigen Gleichungen liegt häufig der Fall vor, daß die Ausgangswerte x_i der Rechnung nicht mehr Ergebnisse einzelner Messungen, sondern selbst schon Mittelwerte von in Gruppen zusammengefaßten Einzelmessungen sind. Solche Gruppierungen von Meßwerten können aus verschiedenen Gründen vorkommen. Beispielsweise kann der Fall vorliegen, daß Meßwerte des gleichen Gegenstandes von verschiedenen Stellen unabhängig voneinander ermittelt wurden, die man nun zusammenfassen will. In solchen Fällen kennt man aus den Mitteilungen der verschiedenen Beobachter die Einzelwerte häufig gar nicht mehr, sondern nur noch ihre Mittelwerte und deren m. F., vielleicht noch ihre Anzahl. Oder es soll ein sehr umfangreiches Material durch mehrere Bearbeiter ausgearbeitet werden; man überläßt dann jedem von ihnen eine Gruppe und benutzt weiterhin nur noch die Gruppenmittelwerte und deren m. F.. Oder auch man redu-

ziert ein sehr umfangreiches Material durch solche Gruppenbildung, um es für die Zwecke einer Veröffentlichung übersichtlicher zu gestalten. In allen diesen Fällen wünscht man bei der Berechnung aus Gruppenmittelwerten für den Gesamtittelwert und seinen m. F. dieselben Werte zu erhalten, als wenn man von den Meßwerten selbst ausgegangen wäre.

Es ist allgemein bekannt, daß man für den Mittelwert x aller Messungen dasselbe Ergebnis bekommt, ob man ihn nach Gl. (1) unmittelbar aus den Einzelmessungen berechnet, oder ob man zunächst Gruppenmittelwerte nach Gl. (1) und erst aus diesen unter Berücksichtigung der Gewichte einen Gesamtittelwert x bildet.

Es ist aber weniger bekannt, daß die Gl. (2) für den m. F. des Gesamtittelwertes bei der Berechnung aus Gruppenmittelwerten ein abweichendes Ergebnis gegenüber der Berechnung aus den Einzelmesswerten liefert. Würde man mit denselben Meßwerten eine neue Gruppeneinteilung vornehmen, so würde man bei gleichem Wert M aus Einzelmesswerten wieder einen anderen Wert M' aus Gruppenmittelwerten erhalten. Die verschiedenen möglichen Werte M' streuen um den festen Wert M als Mittelpunkt. Die Abweichungen können sehr erheblich ausfallen. Der aus den Einzelmesswerten berechnete Wert M des m. F. ist der zuverlässigste, da seine Berechnung aus der größten Zahl von Ausgangswerten erfolgt. Er ist es, den man bei der Berechnung zu erhalten wünscht.

Es ist nun möglich, diesen zuverlässigsten Wert M des m. F. mit Hilfe einer neuen Gleichung auch ohne Kenntnis der Einzelmesswerte aus Gruppenmittelwerten zu berechnen, wenn wenigstens deren m. F. M_i und nach Möglichkeit auch noch die Anzahlen n_i der Meßwerte in jeder Gruppe bekannt sind. Die neue Gleichung lautet

$$M = \sqrt{\frac{[p_i v_i^2] + [(n_i - 1) p_i M_i^2]}{([n_i] - 1) [p_i]}} \quad (3).$$

Zahlenbeispiel Berechnung aus Einzelmesswerten

Meßwert	I			II		III				IV	
	Gesamtittelwert x n. Gl. (1)]			sein m. F. M n. Gl. (2)		Gruppenmittelwerte x_1 bis x_3 n. Gl. (1)				ihre m. F. M_1 bis M_3 n. Gl. (2)	
$x_i^{(1)}$	i	p_i	$p_i x_i$	v_i	$p_i v_i^2$	Gruppe	i	p_i	$p_i x_i$	v_i	$p_i v_i^2$
181	1	1	181	— 4,4	19,4	1	1	1	181	—12,5	156,3
156	2	1	156	—20,6	424,4		2	1	156	+12,5	156,3
							Σ	2	337	—	312,6
192	3	1	192	—15,4	237,2	2	1	1	192	—13,7	187,7
165	4	1	165	+11,6	134,6		2	1	165	+13,3	176,9
178	5	1	178	— 1,4	2,0		3	1	178	+ 0,3	0,1
						Σ	3	535	—	364,7	
157	6	1	157	+19,6	384,2	3	1	1	157	+22,3	497,3
178	7	1	178	— 1,4	2,0		2	1	178	+ 1,3	1,7
180	8	1	180	— 3,4	11,6		3	1	180	— 0,7	0,5
202	9	1	202	—25,4	645,2		4	1	202	—22,7	515,3
	Σ	9	1589	—	1860,6		Σ	4	717	—	1014,8
$x = \frac{1589}{9} = 176,6$						1	$x_1 = \frac{337}{2} = 168,5$			$M_1 = \sqrt{\frac{312,6}{1 \cdot 2}} = 12,50$	
$M = \sqrt{\frac{1860,6}{8 \cdot 9}} = 5,08$						2	$x_2 = \frac{535}{3} = 178,3$			$M_2 = \sqrt{\frac{364,7}{2 \cdot 3}} = 7,80$	
						3	$x_3 = \frac{717}{4} = 179,3$			$M_3 = \sqrt{\frac{1014,8}{3 \cdot 4}} = 9,20$	

Berechnung aus Gruppenmittelwerten x_i, p_i, n_i aus III, M_i aus IV

Gruppenmittelwert x_i	V Gesamtittelwert x nach Gl. (1)			VI sein m. F. M' nach Gl. (2)		VII sein m. F. M nach Gl. (3)		
	i	p_i	$p_i x_i$	v_i	$p_i v_i^2$	n_i	M_i	$(n_i - 1) p_i M_i^2$
168,5	1	2	337	+ 8,1	131,2	2	12,50	312,6
178,3	2	3	535	— 1,7	8,7	3	7,80	364,7
179,3	3	4	717	— 2,7	29,2	4	9,20	1014,8
	Σ	9	1589	—	169,1	9	—	1692,1
$x = \frac{1589}{9} = 176,6$				$M' = \sqrt{\frac{169,1}{2 \cdot 9}} = 3,06$		$M = \sqrt{\frac{169,1 + 1692,1}{8 \cdot 9}} = 5,08$		
Ergebnis	übereinstimmend mit I			abweichend von II		übereinstimmend mit II		

¹⁾ Die Ausgangswerte stellen die Höhen von neunjährigen Kiefern in cm dar. Sie stammen aus H. Vater, Die Ausgleichsrechnung bei Bodenkulturversuchen, Mitt. a. d. sächsischen forstlichen Versuchsanstalt zu Tharandt, Bd. II (1925), S. 8, und wurden als Mittelwerte aus je 14 Messungen gebildet, die aber hier im Interesse einer gekürzten Darstellung wie Einzelmessungen betrachtet werden.

Sie ist eine allgemeinere Gleichung, die die Gl. (2) als Sonderfall in sich schließt und in diese übergeht, wenn jede Gruppe nur aus einem Meßwert besteht, also die Gruppenstärken $n_i = 1$ werden.

Ihre Ableitung erfordert einen größeren Aufwand an Gleichungen und neuen Bezeichnungen, sie soll aus Platzgründen nur kurz angedeutet werden. Sie beruht darauf, daß bei der Berechnung des m. F. aus Einzelmeßwerten nach Gl. (2) nicht die Kenntnis jeder einzelnen Verbesserung v_i , sondern nur die Kenntnis der Summe $[p_i v_i^2]$ erforderlich ist. Diese Summe kann man auch aus den Verbesserungen der Gruppenmittelwerte und aus deren m. F. M_i berechnen. Die dafür notwendige Gleichung gewinnt man, wenn man davon ausgeht, daß sich die Abweichung jedes einzelnen Meßwertes vom Gesamtmittelwert aus seiner Abweichung von seinem Gruppenmittelwert und dessen Abweichung vom Gesamtmittelwert zusammensetzt. Diese für jeden Meßwert gültige Gleichung führt durch Quadrieren, durch Multiplizieren mit dem jeweiligen Gewicht und durch Addieren über sämtliche Meßwerte zu der gesuchten Beziehung zwischen den gewogenen Fehlerquadratsummen, die im Endergebnis die Gl. (3) liefert. Die Übereinstimmung mit dem aus Einzelmeßwerten berechneten m. F. ist exakt, da bei der Ableitung der Gl. (3) keine Vernachlässigungen vorgenommen wurden. Etwaige kleine Abweichungen beim Zahlenrechnen beruhen nur auf Abrundungsfehlern.

Die neue Gl. (3) gibt uns die Möglichkeit, den zuver-

lässigsten Wert M für den m. F. des Gesamtmittelwertes zu berechnen. Es ist nicht zu empfehlen, sich bei der Berechnung aus Gruppenmittelwerten ohne Not weiterhin mit dem unzuverlässigeren Wert M' nach Gl. (2) zu begnügen (s. Zahlenbeispiel).

Wenn man bei einer praktischen Aufgabe keine sicheren Anhaltspunkte für die Wahl der Gewichte p_i der Gruppenmittelwerte und für die Gruppenstärken n_i besitzt, kann man in den Gl. (1) bis (3) die Gewichte p_i in üblicher Weise umgekehrt proportional den Quadraten der m. F. M_i annehmen. In diesem Falle nimmt die Gl. (3) die folgende, für die Zahlenrechnung besonders bequeme Gestalt an:

$$M = \sqrt{\frac{\left[\frac{v_i^2}{M_i^2} \right] + [n_i] - n}{([n_i] - 1) \left[\frac{1}{M_i^2} \right]}} \quad (3a),$$

worin n die Anzahl der Gruppenmittelwerte bedeutet. Hier ist noch die Gesamtzahl $[n_i]$ aller Meßwerte enthalten, die man aber — falls nicht bekannt — nur größenordnungsmäßig richtig zu schätzen braucht, da ihr Zahlenwert das Ergebnis wenig beeinflußt. Nur wenn auch die m. F. M_i der Gruppenmittelwerte unbekannt sind, ist man weiterhin auf die Benutzung der Gl. (2) angewiesen.

Speele (Kr. Hann. Münden). W. Weydanz.

BUCHBESPRECHUNGEN

Prof. Dr. P. Riebesell, *Mathematik des täglichen Lebens*. 82 S. Hamburg 1948. Verlag Hammerich u. Lesser.

Diese Plaudereien über Mathematik im täglichen Leben sind in den Jahren 1942—44 in 4 Auflagen erschienen und in dieser Zeitschrift Bd. 22 S. 301 besprochen. In der neuen Ausgabe sind einige Abschnitte (Relativitätstheorie, Atomenergie) hinzugefügt. Auch diese Auflage wird ihre Leser finden. Für einen Neudruck würde sich eine sorgfältige Durchsicht empfehlen, um den Ausdruck an manchen Stellen mehr zu präzisieren und Versehen zu beseitigen; z. B. wird von der Keilschrift der Ägypter gesprochen, es wird gesagt, daß „im allgemeinen bei den Kartenprojektionen die Großkreise als gerade Linien erscheinen“ usw.

Dresden.

Willers.

Dr. Wilhelm Schlink (Prof. a. d. Techn. Hochschule Darmstadt) und **Dr.-Ing. habil. Heinrich Dietz** (Doz. a. d. Techn. Hochschule Darmstadt), *Technische Statik*. Ein Lehrbuch zur Einführung ins technische Denken. Vierte und fünfte Auflage. 431 S. m. 511 Abb. Berlin, Göttingen, Heidelberg 1948. Springer Verlag. Preis brosch. 27,60 DM.

Das in neuer Doppelaufgabe vorliegende Werk ist seit seinem ersten Erscheinen in den Kreisen der Ingenieure und Studierenden so bekannt geworden, daß es einer neuerlichen Empfehlung entraten kann. Es enthält die grundlegenden mechanischen Fragestellungen der Baustatik, soweit sie der Mechanik der starren Körper angehören, in einer didaktisch erprobten und vor allem den Studierenden der ersten Semester angepaßten Darstellung. Es werden mit zahlreichen Beispielen ebene und räumliche Kräftesysteme in Verbindung mit Gleichgewichtsaufgaben bei geraden und gekrümmten Stäben, Fachwerken und Rahmen, sowie bei Gemischtsystemen behandelt, wobei auch auf die Ermittlung der Einflußlinien für Auflagerkräfte und innere Beanspruchungsgrößen bei bewegten Lasten eingegangen wird. Bei symmetrischen Bauweisen wird auf die mit den Symmetrieeigenschaften verbundenen Vereinfachungen hingewiesen. Bei der Behandlung räumlicher Probleme wird auch die „zugeordnete ebene Abbildung“ und „die

duale Kräfteabbildung“ bei beliebig zerstreuten Kräften erklärt. Es mag jedoch auffallen, daß dabei die für die Raumstatik grundlegenden Begriffe, wie Dyname, Zentralachse u. a. nicht erwähnt werden.

Mit besonderer Betonung muß jedoch die Tendenz des Werkes hervorgehoben werden, zugleich mit dem sachlichen Inhalt der Statik auch eine Einführung in das Wesen der Konstruktion zu geben und so eine Grundlage für die Ausbildung des technischen Denkens des werdenden Ingenieurs zu schaffen. Diese Tendenz kommt schon im Titel des bestbekannten Werkes zum Ausdruck.

Karlsruhe.

Th. Pöschl.

Dr.-Ing. Hayo Föppl, *Messung der Spannungen und der plastischen Verformungen an oberflächengedrückten Probekörpern*. (Mitteilungen des Wöhler-Instituts Braunschweig Heft 41.) 67 S. m. 40 Abb. Braunschweig 1948. Verlag Friedrich Vieweg u. Sohn. Preis 4,— DM.

Bekanntlich wird durch das Oberflächendrücken, das auf verschiedene Arten (durch Hämmern, Rollen, Abblasen mit Stahlgriß u. dgl.) ausgeführt werden kann, die Dauerhaftigkeit eines Werkstücks wesentlich erhöht. Zur Ermittlung der in der Oberflächenschicht beim Drücken entstehenden Spannungen sind verschiedene Wege angegeben worden (z. B. von O. Föppl, G. Sachs, H. Chitz usw.). Die hier zur Überprüfung dieser Methoden angestellten Versuche wurden in der Weise ausgeführt, daß die Probekörper in ihrem zylindrischen Teil geätzt und das entstandene plastische Verformungsgebiet stufenweise wieder abgenommen wurde. Durch Messung der Länge des Probekörpers und der Dicke der abgeätzten Schicht werden in jeder Stufe die für die Spannungsberechnung notwendigen Beobachtungswerte gewonnen. Durch Veränderung der Art des Drückens (Anpresskraft, Vorschub, Abrundungsradius der Rollen und Zahl der Überrollungen) werden die jeweils günstigsten Ergebnisse für das Oberflächendrücken ermittelt.

Karlsruhe.

Th. Pöschl.

Dr.-Ing. habil. Alf Pflüger (Doz. a. d. Techn. Hochschule Hannover), Einführung in die Schalenstatik. (Bücher der Technik, herausgegeben von Dr.-Ing. Kuhlentkamp). 91 S. m. 54 Abb. Wolfenbüttel und Hannover 1948. Wolfenbütteler Verlagsanstalt G. m. b. H. (Notdruck). Preis brosch. 4,80 DM.

Das Heft stellt eine Ansammlung einer seit mehreren Jahren an der Techn. Hochschule Hannover gehaltenen Vorlesung dar. Es beginnt mit einer Erklärung der Grundbegriffe, die zur Kennzeichnung des Spannungszustandes erforderlich sind, sowie über die grundlegenden Annahmen und Voraussetzungen für die Berechnung von Schalen, die die Eigenart des Kräftespiels in räumlich gekrümmten Flächenträgern erkennen lassen. In den vier Hauptteilen werden die Membrantheorie der Rotationsschalen in Anwendung auf den Kuppel- und Behälterbau für verschiedene Behälterformen, die Biegetheorie der drehsymmetrisch belasteten Kreiszyinderschale mit allgemeiner Lösung für konstante Wandstärke unter Flüssigkeitsdruck, die Membrantheorie der Zylinderschalen mit Anwendung auf die Zylinderschale mit waagerechter Achse unter Eigengewicht und auf Zylinderschalen allgemeiner Form, und schließlich Einzelheiten des Spannungszustandes behandelt. Die zahlreichen Abbildungen tragen wesentlich zum Verständnis der formelmäßigen Ableitungen bei.

Vom Leser wird an Vorkenntnissen ungefähr das vorausgesetzt, was der Vorprüfung im Bauingenieurwesen an einer Technischen Hochschule entspricht. Da das Heft klar und leicht verständlich geschrieben ist, kann die Zielsetzung, dem Leser eine Einführung in das umfangreiche Gebiet der Schalenstatik zu vermitteln, als gelungen bezeichnet werden.

Karlsruhe.

Th. Pöschl.

Dr. phil. H. von Sanden (o. Prof. an der Technischen Hochschule Hannover), Praktische Mathematik. Teubners Mathematische Leitfäden, Band 44. 100 S. mit 17 Abb. Leipzig 1948. B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft. Preis 3,30 DM.

Das Buch ist aus einer Vorlesung über praktische Mathematik hervorgegangen, die an der Technischen Hochschule Hannover neben den Anfängervorlesungen über höhere Mathematik gehalten wird (eine sehr beachtenswerte Regelung!). Es bringt für den Studenten der Ingenieurwissenschaften und den in der Praxis stehenden Ingenieur in fünf Abschnitten (Zeichnerische Behandlung von Funktionen; Der Satz von Taylor, Näherungsformeln; Integration, Differentiation und Interpolation; Statistik; Ausgleichsrechnung) einen Querschnitt durch die gebräuchlichsten Methoden der praktischen Mathematik. Das Büchlein setzt nur geringe Vorkenntnisse in höherer Mathematik voraus und ist klar und leicht verständlich geschrieben. Eine große Zahl von Beispielen stellen die nötige Verbindung zwischen den Fragestellungen der Praxis und den gebotenen Lösungsmethoden her. Besonderer Wert wird dabei auf planvolle Anlage jeder Rechnung gelegt, und der ganze Rechnungsgang wird auf die gewünschte oder erzielbare Genauigkeit des Endresultates ausgerichtet. Zu kurz erscheinen dem Referenten die Auflösung von Gleichungen (mit 2 Seiten) und der Anhang über harmonische Analyse behandelt. Man kann das Buch besonders auch den Studenten der Technischen Hochschulen empfehlen, an denen noch keine Vorlesungen über praktische Mathematik für die technischen Fachrichtungen abgehalten werden.

Dresden.

Opitz.

Dr. Wolfgang Haack (vorm. o. Prof. a. d. Techn. Hochschule Berlin-Charlottenburg), Differential-Geometrie. Teil II (Bücher der Mathematik und Naturwissenschaften. Herausgeg. von Dr. Henry

Poltz.) 131 S. mit 3 Abb. Wolfenbüttel-Hannover 1948. Wolfenbütteler Verlagsanstalt (Notdruck). Preis brosch. 7,—DM.

Die Weiterentwicklung der Gauß-Mongeschen Differential-Geometrie im 19. und 20. Jahrhundert ist durch die Namen Plücker, F. Klein, Möbius, Lie, Riemann, Levi-Civita usw. gekennzeichnet. Aus der Fülle ihrer Gedanken und Untersuchungen bietet der Verfasser in dem vorliegenden zweiten Band seiner Differential-Geometrie eine wohlwogene Auswahl dar. Der Inhalt des nur 130 Seiten starken Bändchens umfaßt eine Einführung in den Ricci-Kalkül, eine Darstellung der invarianten Ableitungen der Flächentheorie und in vier weiteren Kapiteln einen Abriss der differentiellen Liniengeometrie (Elemente, Regelflächen, Strahlensysteme und -komplexe). Eine fruchtbare Lektüre dieses zweiten Bandes setzt die Vertrautheit mit dem ersten voraus; aber auch wenn diese Bedingung erfüllt ist, wird der Leser bisweilen nichts zu lachen haben. Das liegt aber dann weder an ihm selbst — wie ihm zum Trost gesagt sei —, noch am Verfasser sondern allein an den unvermeidlichen Schwierigkeiten, die Fülle des Stoffes mit der Enge des Raumes in Einklang zu bringen. Das Mögliche in dieser Hinsicht hat der Verfasser getan und damit sein pädagogisches Geschick und seine überlegene Sachkenntnis erneut bewiesen. Die äußere Ausstattung des Notdruckes ist zeitgemäß bescheiden.

Freiberg (Sa.).

Grüb.

Prof. Dr. Erich Schönhardt, Vektor-Rechnung mit je einem Anhang über Tensoren und über komplexe Zahlen und Zeiger. Herausgegeben von Dipl.-Ing. Werther Pavel (2. Aufl.). 295 S. m. 150 Abb. Stuttgart 1948. Preis brosch. 12,—DM.

Die vorliegende Einführung in die Vektorrechnung ist in der Hauptsache für Ingenieure und Physiker geschrieben, daher wurde an einigen Stellen nur der Gedankengang der Beweise ohne eingehendere Ausführungen gegeben. Das Buch zeichnet sich durch eine große Zahl (155) guter Beispiele aus, zu denen meist ausführliche Lösungen gegeben werden. Ein Student, der möglichst selbständig diese Beispiele durcharbeitet, dürfte dadurch mit der Handhabung der Vektorrechnung vertraut werden. Das Buch gliedert sich in einen verhältnismäßig umfangreichen Abschnitt über Vektoralgebra (etwa 80 Seiten) und einen über Vektoranalysis (125 Seiten). Ein erster Anhang (30 Seiten) bringt die Grundbegriffe der Tensorrechnung, ein zweiter (40 Seiten) das Wichtigste über komplexe Zahlen und Zeiger. Ein alphabetisches Register erleichtert das Nachschlagen.

Das treffliche Buch, das sehr sauber geschrieben und durch ein Flachdruckverfahren vervielfältigt ist, kann sowohl zum Selbststudium, das durch die zahlreichen guten Abbildungen und eine Formelzusammenstellung erleichtert wird, wie auch zum Gebrauch neben Vorlesungen empfohlen werden.

Dresden.

Willers.

Dr. Heinrich Blasius, Wärmelehre. Physikalische Grundlagen vom technischen Standpunkt. (5. Aufl.) 294 S. m. 126 Abb., 67 Aufg. u. 15 Tabellen. Hamburg 1949. Boysen & Maasch Verlag. Preis brosch. 11,50 DM.

Die jetzt erschienene fünfte Auflage dieses Buches ist gegenüber der vierten, die in dieser Zeitschrift Bd. 22 (1942) S. 62 und 240 von Prof. Dr. Pauer besprochen wurde, kaum verändert. Ein neues Referat erübrigt sich daher.

Dresden.

Willers.

Die besprochenen und angezeigten Bücher sind durch den Buchhandel zu beziehen

EINGEGANGENE BÜCHER

Beider Schriftleitung sind folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten)

Dipl.-Ing. Dr. phil. Albert Betz (Dir. des Max-Planck-Instituts für Strömungsforschung und Prof. a. d. Univ. Göttingen), *Konforme Abbildung*. 359 S. mit 276 Abb. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1948. Springer-Verlag. Preis brosch. 36,— DM.

A. Ziegler (Obering.), *Einfache Formeln für Träger über 2–10 Felder mit beliebig großen Stützweiten*. 99 S. Bonn 1949. Ferd. Dümmers Verlag. Preis brosch. 7,80 DM.

Dr.-Ing. C. Pfeleiderer (Prof. a. d. Techn. Hochschule Braunschweig), *Die Kreiselpumpen für Flüssigkeiten und Gase. Wasserpumpen, Ventilatoren, Turbogebälse, Turbokompressoren*. 3. Aufl. 518 S. mit

353 Abb. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1949. Springer-Verlag. Preis brosch. 51,— DM.

Dr. Konrad Knopp (o. Prof. der Mathematik a. d. Univ. Tübingen), *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen* (Grundlehren der mathem. Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd. II). 4. Aufl. 582 S. mit 14 Abb. Berlin und Heidelberg 1947. Springer-Verlag. Preis brosch. 39,60 DM.

Dr. phil. Dr.-Ing. e. h. Werner Schmiedler (vorm. o. Prof. a. d. Techn. Hochschule Berlin), *Vorträge über Determinanten und Matrizen mit Anwendungen in Physik und Technik*. VIII/155 S. mit 3 Abb. Berlin 1949. Akademie-Verlag. Preis brosch. 10,— DM.

NACHRICHTEN

Die diesjährige Tagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung findet in der mit dem 18. 9. d. J. beginnenden Woche in Köln statt.

In Belgrad erscheint eine neue mathematische Zeitschrift: *Bulletin de La Société des Mathématiciens et Physiciens de la R. P. de Serbie*, die von Herrn

J. Karamata herausgegeben wird. Das erste Heft des ersten Jahrganges (1949) liegt vor.

In den letzten Jahren starben von in Deutschland bekannten Mathematikern:

Prof. Dr. T. Carleman, Djursholm,
Prof. Dr. M. Bauer, Budapest.

ZUSCHRIFT AN DEN HERAUSGEBER

Zu P. Riebesell: Kritische Betrachtungen zur sogenannten Großzahlforschung in der Technik und zur Anwendung mathematisch-statistischer Methoden in der Biologie und Medizin. Z. angew. Math. Mech. 28, 226–234.

Im Heft Nr. 7/8 des 28. Bandes dieser Zeitschrift hat Herr Riebesell Kritik an der sog. Großzahlforschung geübt.

Da diese in der Technik aber zu bemerkenswerten Erfolgen geführt hat, trifft ihre Kritik, obwohl mathematisch einwandfrei, offenbar nicht das in der Praxis Wesentliche.

Zunächst ist klar, daß man eine beliebige, stetige und eindeutige Verteilungsfunktion $y = f(x)$ eines Merkmals x durch eine Transformation $x = x(\xi)$ in eine Normalverteilung $y = e^{-\xi^2}$ des neuen Merkmals ξ überführen kann. Ist nämlich $x = u(y)$ die zu $f(x)$ inverse Funktion, so hat man nur $x(\xi) = u(e^{-\xi^2})$ anzusetzen, um $y = e^{-\xi^2}$ zu erhalten. Die Transformation des Merkmals darf also nicht damit begründet werden, daß dadurch eine Normalverteilung (Gauß-Kurve) des jeweils vorliegenden Kollektivs erreicht werden soll, sondern die Wahl des Merkmals hat so zu erfolgen, daß sie dem Zweck der statistischen Untersuchung entspricht.

Untersucht man z. B. das Verhalten von Güterwagen nach dem Herabrollen vom Ablaufberg eines Rangierbahnhofs, so wird man, wenn dabei die Zeitdauer von Interesse ist, welche die ablaufenden Wagen zum Passieren einer Weichenzone brauchen, die Wagensgeschwindigkeit als Merkmal wählen. Interessiert jedoch die Konstruktion von Gleisbremsen, so ist die kinetische Energie der Wagen das zweckmäßige Merkmal. Ob sich bei dem einen oder dem anderen Merkmal evtl. eine Normalverteilung ergibt, ist bei dessen Wahl nicht maßgebend.

In der Technik spielt die Normalverteilung überhaupt nicht die wichtige Rolle, wie in anderen Gebieten der

Statistik, wo es auf die Kennzeichnung eines Kollektivs durch möglichst wenige Parameter ankommt. Das aufgezeichnete Bild der Streuungskurve sagt dem Techniker mehr, als ihre analytische Formel. Zeigt seine Kurve annähernd die Form der Gauß-Kurve, so ist das dem Praktiker ein diagnostisches Zeichen etwa für den guten Ablauf eines Fertigungsprozesses.

Zeigt die Verteilungskurve aber zwei (oder mehrere) Maxima, so hat die Aufgabe, die Kurve als Superposition von Normalverteilungen darzustellen, keine eindeutige Lösung, wie Herr R. richtig bemerkt. Auch sein Einwand, daß erst zu untersuchen sei, ob die Maxima wirklich echte Buckel sind oder innerhalb der Streuung eines endlichen Kollektivs zufällig sind, ist vom mathematischen Standpunkt aus stichhaltig. In der technischen Praxis sind derartige Buckel aber wieder nur ein diagnostischer Hinweis auf eine mögliche Unvollkommenheit des Fertigungsprozesses. Ob die Buckel echt sind oder nicht, kommt bei einer dann vorzunehmenden Wiederholung der Untersuchung ganz von selbst heraus. Sind sie nun echt, so wird nachgeforscht, wodurch sie entstehen, und der Arbeitsgang solange geändert, bis sie verschwunden sind und die angestrebte Normalverteilung möglichst erreicht ist.

Der Standpunkt des technischen Betriebsmannes und des Wahrscheinlichkeitstheoretikers sind in der Statistik also recht verschieden; aber jeder in seinem Bereich berechtigt. In dem Buche: „Praktische Großzahlforschung“ von Dr.-Ing. Karl Daevies, Berlin, VDI-Verlag, 1933 findet man eine erstaunliche Fülle von Beispielen für die Anwendung der Großzahlforschung in der Technik, wobei der erreichte Erfolg die Primitivität der mathematischen Hilfsmittel rechtfertigt.

Hannover.

H. v. Sanden.

Die Zeitschrift hat Herrn Prof. Dr. Riebesell vorgelegen.

Verantwortlich für den Inhalt: Prof. Dr. Fr. A. Willers, Dresden; für den Verlag: H. Kaesser, Berlin, Verlag: Akademie-Verlag GmbH., Berlin NW 7, Schiffbauerdamm 19, Fernsprecher: 42 64 12 und 42 69 18. Postcheckkonto: Berlin 35 021. Bestell- und Versagnummern dieses Heftes: 1009/29/6. Die Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik erscheint monatlich. Bezugspreis: vierteljährlich RM 15.— zuzüglich Bestellgeld. Einzelheft RM 6.—. Abbestellungen können nur bis 4 Wochen vor Quartalsende anerkannt werden, anderenfalls wird das folgende Quartal noch geliefert. Verantwortlich für den Anzeigenteil: Curt F. W. Schreiber, Berlin. Druck: Julius Beltz, Langensalza. 57 273/4022 — Nr. 473. — Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 245 der Sowjetischen Militär-Verwaltung in Deutschland.